This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

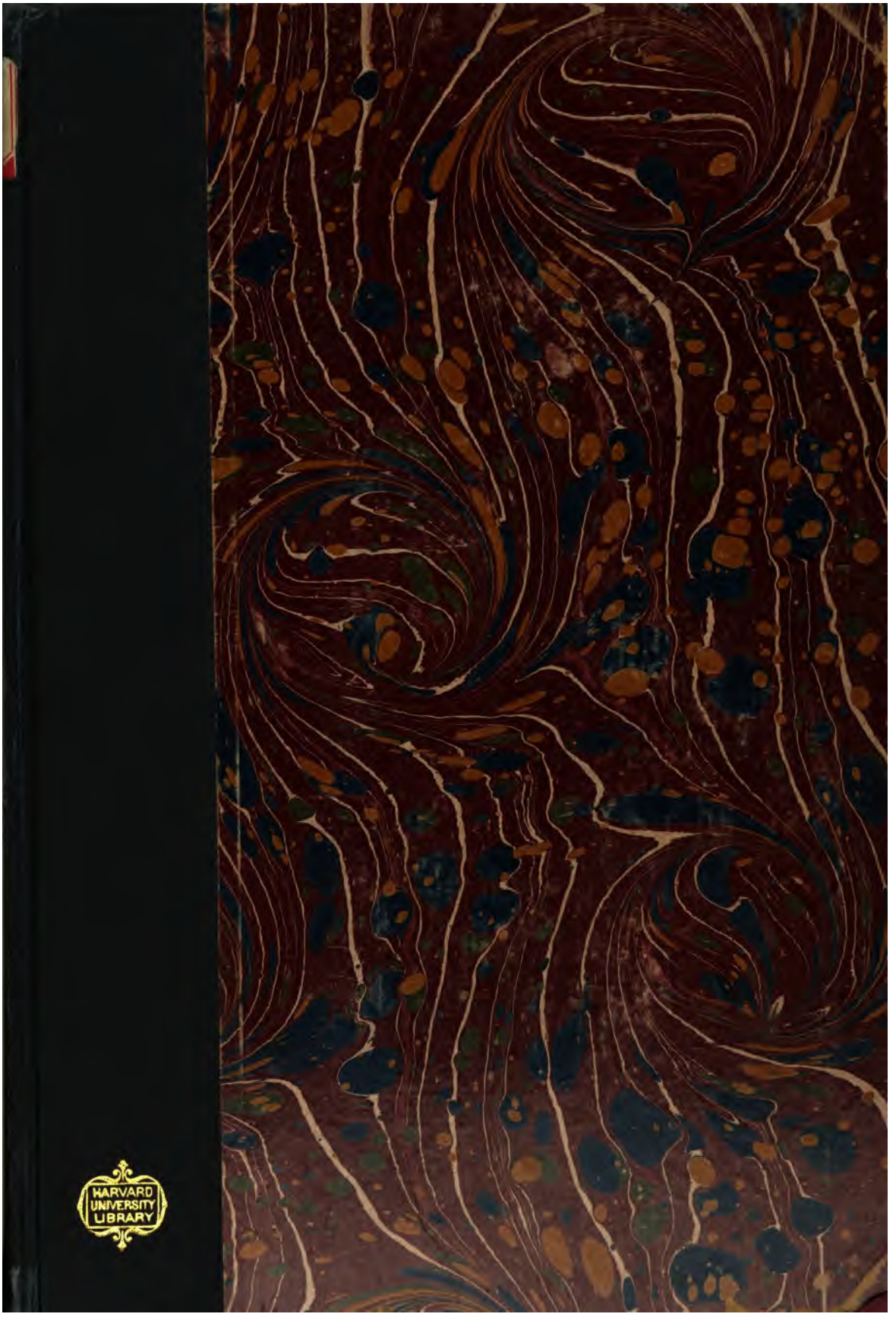
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

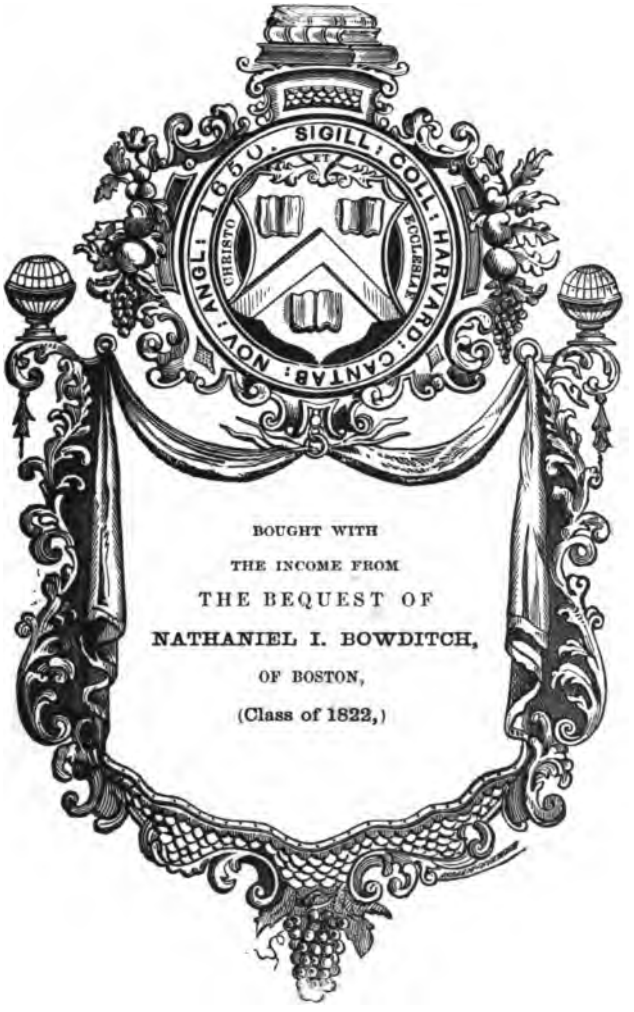
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY

Math 4508.85



SCIENCE CENTER LIBRARY

ÜBER DIE

DEFINITIONSGLEICHUNGEN

DER

CONTINUIRLICHEN TRANSFORMATIONSGRUPPEN.

HABILITATIONSSCHRIFT,

DURCH WELCHE

MIT ZUSTIMMUNG DER PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

ZU SEINER

MONTAG, DEN 26. OKTOBER, VORMITTAGS VON 11—12 UHR

IM

CZERMAKSCHEN INSTITUTE

ZU HALTENDEN

PROBEVORLESUNG:

„ANWENDUNGEN DER GRUPPENTHEORIE

AUF

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN“

ERGEBENST EINLADET

FRIEDRICH ENGEL,

DR. PHIL.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1885.

Math 4508.85

HARVARD COLLEGE
AUG 3 1907
LIBRARY.
Bowditch fund.

Einleitung.

Ein längerer Aufenthalt in Christiania bot mir Gelegenheit im persönlichen Verkehre mit Sophus Lie dessen Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen eingehend zu studiren. Das Ziel unserer gemeinsamen Arbeit war, eine zusammenhängende Darstellung dieser Theorie zu liefern, wobei mir wesentlich nur die redactionelle Seite der Aufgabe zufiel. Nebenbei beschäftigte ich mich jedoch auch mit selbstständigen Untersuchungen auf dem Gebiete der Transformationsgruppen. Meine Resultate sollen im Verlaufe dieser Abhandlung auseinandergesetzt werden.

Zur Zeit ist nun jene zusammenhängende Darstellung der Theorie noch gar nicht vollendet, geschweige denn veröffentlicht. Zum Verständnisse des Folgenden würde es somit nöthig sein, die ziemlich zahlreichen Lie'schen Abhandlungen über Transformationsgruppen zu kennen. Um diesem Uebelstande nach Möglichkeit abzuhelfen, sollen zunächst die Hauptbegriffe und Hauptsätze aus der Theorie der Transformationsgruppen in aller Kürze zusammengestellt werden, so weit sie später Anwendung finden. Auf die Beweise müssen wir natürlich bei dieser Zusammenstellung verzichten.

A. Eine Schaar von Transformationen

$$x_i' = f_i(x_1 \ldots x_n;\ a_1 \ldots a_r) \quad (i = 1 \ldots n)$$

der Variabeln $x_1 \ldots x_n$ bildet eine *endliche continuirliche Transformationsgruppe*, wenn zwei Transformationen der Schaar nach einander ausgeführt wieder eine Transformation der Schaar ergeben. Analytisch heisst diess, dass die obige Transformation verbunden mit

$$x_i'' = f_i(x_1' \ldots x_n';\ b_1 \ldots b_r)$$

eine Transformation von der Gestalt

$$x_i'' = f_i\,(x_1 \ldots x_n;\ c_1 \ldots c_r)$$

ergiebt, bei welcher die c nur von den a und b abhängen:

$$c_\varkappa = \varphi_\varkappa (a_1 \ldots a_r; b_1 \ldots b_r).$$

Die Grössen $a_1 \ldots a_r$ heissen die *Parameter* der Gruppe. Es ist klar, dass es auf die Gruppe als solche keinen Einfluss hat, wenn man irgend r unabhängige Functionen der $a_\varkappa$ als neue Parameter einführt.

Wir werden uns hier auf solche Gruppen beschränken, welche die identische Transformation $x_i' = x_i$ enthalten und von infinitesimalen Transformationen erzeugt sind.

Unter einer *infinitesimalen Transformation* versteht Lie eine Transformation von der Gestalt:

$$x_i' = x_i + \xi_i (x_1 \ldots x_n)\, \delta t \quad (i = 1 \ldots n),$$

wobei δt eine unendlich kleine Grösse bezeichnet. Für diese infinitesimale Transformation führt er nun das Symbol

$$\sum_1^n{}_i \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = X(f)$$

ein, aus welchem ihre Transformationsgleichungen augenblicklich hergeleitet werden können. Bedeutet nämlich f eine beliebige Function von $x_1 \ldots x_n$, so besteht die Gleichung:

$$f(x_1' \ldots x_n') = f(x_1 \ldots x_n) + X(f)\, \delta t,$$

aus welcher $x_i' = x_i + \xi_i \delta t$ ohne Weiteres folgt. Es ist auch klar und jedenfalls leicht zu verificiren, *dass das Symbol $X(f)$ von der Wahl der Variabeln unabhängig ist.*

Denkt man sich die infinitesimale Transformation $X(f)$ unendlich oft wiederholt, so erhält man ∞^1 endliche Transformationen, nämlich die folgenden:

$$x_i' = x_i + t\xi_i + \frac{t^2}{1.2} \sum_1^n{}_\varkappa \xi_\varkappa \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} + \cdots \quad (i = 1 \cdots n)$$

oder kürzer:

$$x_i' = x_i + t\, X(x_i) + \frac{t^2}{1.2} XX(x_i) + \cdots.$$

Wie sich leicht zeigen lässt, bilden diese ∞^1 Transformationen eine endliche, continuirliche Transformationsgruppe mit dem einen Parameter t. Lie nennt diese Gruppe *eingliedrig* und sagt, dass sie von der infinitesimalen Transformation $X(f)$ *erzeugt wird.*

Mehrere, etwa r infinitesimale Transformationen

$$X_\varkappa f = \sum_1^n{}_i \xi_{i\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (\varkappa = 1 \ldots r)$$

heissen von einander *unabhängig*, wenn es nicht möglich ist r Con-

stanten $c_1 \ldots c_r$ so zu wählen, dass der Ausdruck $c_1 X_1 f + \cdots + c_r X_r f$ identisch verschwindet.

Sind $X_1 f \ldots X_r f$ von einander unabhängig, so lässt sich zeigen, dass der Inbegriff aller infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^r c_\varkappa X_\varkappa f$$

eine Schaar von eingliedrigen Gruppen

$$x_i' = x_i + t \sum_1^r c_\varkappa X_\varkappa(x_i) + \cdots \tag{1}$$

erzeugt, welche ∞^r verschiedene Transformationen enthält. Lie hat weiter nachgewiesen, dass *diese Schaar von Transformationen immer dann, aber auch nur dann eine endliche continuirliche Transformationsgruppe bildet, wenn zwischen den Xf Beziehungen von der Form*

$$X_i(X_\varkappa(f)) - X_\varkappa(X_i(f)) \equiv \sum_1^n \{ X_i(\xi_{j\varkappa}) - X_\varkappa(\xi_{ji}) \} \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_1^r c_{i\varkappa s} X_s f$$

bestehen, wobei die $c_{i\varkappa s}$ numerische Constanten bedeuten. Ist diese Bedingung erfüllt, so stellt (1) die endlichen Gleichungen einer continuirlichen Transformationsgruppe mit r Parametern dar oder kürzer einer *r-gliedrigen* Gruppe.

Die Schaar der ∞^{r-1} infinitesimalen Transformationen, welche einer solchen r-gliedrigen Gruppe angehören, ist offenbar dadurch charakterisirt, dass sie gleichzeitig mit $X_i f$ und $X_\varkappa f$ immer auch alle infinitesimalen Transformationen von der Form

$$c_i X_i f + c_\varkappa X_\varkappa f, \quad X_i(X_\varkappa(f)) - X_\varkappa(X_i(f)) = (X_i X_\varkappa)$$

enthält.

Als Beispiel diene die allgemeine projectivische Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit. Ihre endlichen Gleichungen sind

$$x' = \frac{x + a_1}{a_2 x + a_3},$$

die infinitesimalen Transformationen aber:

$$X_1 f = \frac{df}{dx}, \quad X_2 f = x \frac{df}{dx}, \quad X_3 f = x^2 \frac{df}{dx}$$

und zwar bestehen die Relationen:

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f.$$

B. Es sei

$$Xf = \sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = c_1 X_1 f + \cdots + c_r X_r f$$

die allgemeine infinitesimale Transformation einer r-gliedrigen Gruppe.

Differentiirt man die Gleichungen

$$\xi_i = \sum_1^r c_\varkappa \xi_{i\varkappa} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

hinreichend oft nach $x_1 \ldots x_n$, so kann man $c_1 \ldots c_r$ eliminiren und enthält für $x_1 \ldots x_n$ eine Reihe von linearen homogenen Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \sum_1^n A_{\lambda i}(x_1 \ldots x_n)\xi_i + \sum_1^n \sum_1^n B_{\lambda i\varkappa}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} + \cdots = 0$$
$$(\lambda = 1,2 \ldots).$$

Solcher Gleichungen kann man so viele aufstellen, dass sie $\xi_1 \ldots \xi_n$ und damit die ganze Gruppe vollständig definiren. Lie nennt sie daher die *Definitionsgleichungen* der betreffenden endlichen continuirlichen Gruppe. Mit Berücksichtigung des unter A. gesagten können wir jetzt den Satz aussprechen:

„Ein System linearer homogener Differentialgleichungen von der Form (2) definirt eine endliche continuirliche Transformationsgruppe, wenn seine allgemeinsten Lösungen $\xi_1 \ldots \xi_n$ nur von willkürlichen Constanten abhängen und wenn sich aus irgend zwei Lösungssystemen $\xi_{11} \ldots \xi_{n1}$, $\xi_{12} \ldots \xi_{n2}$ immer ein neues Lösungssystem von der Form

$$(3) \qquad \sum_1^n \left(\xi_{i1} \frac{\partial \xi_{j2}}{\partial x_i} - \xi_{i2} \frac{\partial \xi_{j1}}{\partial x_i} \right) \qquad (j = 1 \ldots n)$$

zusammensetzen lässt."

C. Den *endlichen* continuirlichen Transformationsgruppen mit ihren *willkürlichen Parametern* stehen die *unendlichen* mit *willkürlichen Parametern und willkürlichen Functionen* gegenüber. Wir betrachten natürlich nur solche unendliche Gruppen, deren infinitesimale Transformationen sich durch lineare homogene Differentialgleichungen von der Form (2) definiren lassen. Diese Differentialgleichungen werden dann alle in dem letzten Satze angegebenen Eigenschaften besitzen, nur dass ihr allgemeinstes Lösungssystem nicht bloss von willkürlichen Constanten abhängt, sondern auch von willkürlichen Functionen.

Hier tritt nun eine Schwierigkeit hervor. Die Schaar von infinitesimalen Transformationen, welche durch jene Differentialgleichungen definirt wird, erzeugt eine Schaar von eingliedrigen Gruppen; es ist

aber bisher noch nicht gelungen, den Nachweis zu führen, dass diese Schaar von eingliedrigen Gruppen eine Transformationsgruppe bildet und dass sie mit der ursprünglichen unendlichen Gruppe identisch ist.

Um diese Schwierigkeit zu vermeiden, werden wir uns wenigstens bei den unendlichen Gruppen auf die infinitesimalen Transformationen beschränken und die endlichen Transformationen fast ganz aus dem Spiele lassen. In der Theorie der continuirlichen Transformationsgruppen sind ja sowieso die infinitesimalen Transformationen weit wichtiger als die endlichen.

Zu dem Ende führen wir den Ausdruck: *Gruppe von infinitesimalen Transformationen* ein. Wir verstehen darunter eine Schaar von infinitesimalen Transformationen, welche die Eigenschaft hat, dass sie mit $X_1 f$ und $X_2 f$ zugleich auch noch die Transformationen $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ und $(X_1 X_2)$ enthält, und welche ausserdem sich durch Differentialgleichungen definiren lässt. Es ist selbstverständlich, dass diese Differentialgleichungen linear und homogen sind und dass sich aus zwei Lösungssystemen ξ_{i1} und ξ_{i2} derselben stets ein drittes von der Form (3) ableiten lässt. Wir nennen diese Differentialgleichungen die *Definitionsgleichungen unserer Gruppe von infinitesimalen Transformationen.**)

Enthält das allgemeinste Lösungssystem der besprochenen Differentialgleichungen nur *willkürliche Constanten*, so haben wir eine *endliche* Gruppe von infinitesimalen Transformationen vor uns und zwar erzeugen diese Transformationen nach dem Obigen eine endliche continuirliche Transformationsgruppe. Enthalten dagegen die allgemeinsten Lösungen jener Differentialgleichungen auch *willkürliche Functionen*, so haben wir es mit einer *unendlichen* Gruppe von infinitesimalen Transformationen zu thun. Ob dieselbe jedoch eine unendliche Transformationsgruppe erzeugt oder nicht, das lassen wir dahingestellt.

D. Von grosser Wichtigkeit ist der Begriff der *Aehnlichkeit.*

Zwei r-gliedrige Transformationsgruppen heissen *ähnlich*, wenn die eine bei Einführung geeigneter Variabeln mit der andern identisch wird.

Es seien also z. B.

$$x' = \varphi(x; a_1, a_2); \qquad x' = \psi(x; b_1, b_2)$$

zwei zweigliedrige Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit und es

---

*) Die Einführung dieser Bezeichnungen geschieht im Einverständniss mit Lie. Derselbe hat zwar den Ausdruck „Gruppe von infinitesimalen Transformationen" noch nicht benutzt, wohl aber den Begriff, von welchem er namentlich in seiner Abhandlung „Ueber unendliche continuirliche Gruppen" (Christiania Videnskabsselskabs Forh. 1882 Nr. 12) Gebrauch macht.

nehme die zweite bei Einführung der neuen Variablen $x_1 = \omega(x)$ und entsprechend $x_1' = \omega(x')$ die Form an:

$$x_1' = \varphi(x_1; a_1(b_1\, b_2),\ a_2(b_1\, b_2)).$$

Werden jetzt noch a_1 und a_2 als neue Parameter eingeführt, so wird die zweite Gruppe mit der ersten identisch; also sind beide mit einander ähnlich.

Zwei r-gliedrige Transformationsgruppen sind offenbar auch dann mit einander ähnlich, wenn die infinitesimalen Transformationen der einen bei geeigneter Variabelnwahl in die infinitesimalen Transformationen der andern übergehen. Hiernach ist auch klar, was unter der Aehnlichkeit zweier endlicher oder unendlicher Gruppen von infinitesimalen Transformationen zu verstehen ist.

E. Wenn ein analytischer Ausdruck bei einer Transformation sich nicht ändert, wenn er also invariant bleibt, so sagt Lie, dass der Ausdruck die betreffende Transformation *gestattet* oder *zulässt.*

Eine Function $\varphi(x_1 \ldots x_n)$ gestattet die infinitesimale Transformation Xf, wenn der Ausdruck $X(\varphi)$ identisch verschwindet oder, was dasselbe ist, wenn φ eine Lösung der Gleichung $Xf = 0$ ist. Zugleich mit der infinitesimalen Transformation Xf gestattet dann φ auch alle endlichen Transformationen

$$x_i' = x_i + t\,X(x_i) + \frac{t^2}{1\cdot 2}\,X\,X(x_i) + \cdots$$

der zugehörigen eingliedrigen Gruppe.

Giebt es eine Function $\varphi(x_1 \ldots x_n)$, welche r unabhängige *infinitesimale* Transformationen $X_1 f \ldots X_r f$ einer r-gliedrigen Gruppe zulässt, so gestattet dieselbe auch alle *endlichen* Transformationen der Gruppe. Bei unserer Gruppe bleibt daher jede einzelne der ∞^1 Mannigfaltigkeiten $\varphi = \text{const.}$ invariant d. h. jeder Punkt des Raumes $(x_1 \ldots x_n)$ bewegt sich auf einer solchen Mannigfaltigkeit. Man nennt in diesem Falle die Gruppe *intransitiv.* Dagegen heisst unsere Gruppe *transitiv*, wenn sie jeden Punkt des Raumes $(x_1 \ldots x_n)$ in jeden andern überführt, analytisch ausgedrückt, wenn die Gleichungen

$$X_1 f = 0 \ldots X_r f = 0$$

keine gemeinsame Lösung haben.

Eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen, mag sie nun endlich oder unendlich sein, heisst *transitiv*, wenn es keine Function giebt, welche die allgemeine infinitesimale Transformation der Gruppe gestattet, im entgegengesetzten Falle heisst sie *intransitiv.*

Ein Gleichungensystem

$$\varphi_i(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad (i = 1 \ldots m)$$

oder, geometrisch ausgedrückt, eine Mannigfaltigkeit des Raumes

$(x_1 \ldots x_n)$ *gestattet die infinitesimale Transformation* Xf, *sobald alle Ausdrücke* $X(\varphi_i)$ *vermöge des Gleichungensystems verschwinden.*

Gestattet eine Function oder ein Gleichungensystem die zwei infinitesimalen Transformationen $X_1 f$ und $X_2 f$, so gestatten sie zugleich auch die Transformationen $c_1 X_1 f + c_2 X_2 f$ und $(X_1\, X_2)$. *Hat man daher eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen, so bildet der Inbegriff aller in ihr enthaltenen Transformationen, welche eine bestimmte Function oder ein bestimmtes Gleichungensystem invariant lassen, selbst wieder eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen.*

Den Begriff der Primitivität, so wichtig er auch ist, übergehen wir hier, weil er im Folgenden keine Anwendung findet.

F. Jetzt wollen wir noch die Begriffe der *Zusammensetzung* und des *Isomorphismus* und was damit zusammenhängt kurz besprechen. Diess sind lauter Begriffe, welche bloss für die endlichen Transformationsgruppen eine Bedeutung haben (wenigstens vorläufig).

Es seien $X_1 f \ldots X_r f$ unabhängige infinitesimale Transformationen einer r-gliedrigen Transformationsgruppe und demnach

$$(X_i\, X_\varkappa) = \sum_1^r{}_s\, c_{i\varkappa s}\, X_s f.$$

Besitzen irgend $m < r$ unabhängige infinitesimale Transformationen

$$Y_j f = \sum_1^r{}_\varkappa\, l_{\varkappa j}\, X_\varkappa f \qquad (j = 1 \ldots m)$$

unserer Gruppe die Eigenschaft, dass jedes $(Y_i\, Y_j)$ sich linear mit constanten Coefficienten durch $Y_1 f \ldots Y_m f$ allein ausdrückt:

$$(Y_i\, Y_j) = \sum_1^m{}_s\, g_{ijs}\, Y_s f,$$

so erzeugen die infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \ldots Y_m f$ eine m-gliedrige *Untergruppe* der ersten Gruppe. Insbesondere heisst diese Untergruppe *invariant* (ausgezeichnet), wenn auch jedes $(X_i\, Y_j)$ sich durch die $Y_j f$ allein ausdrückt:

$$(X_i\, Y_j) = \sum_1^m{}_s\, h_{ijs}\, Y_s f,$$

wobei unter den h_{ijs} Constanten zu verstehen sind.

Kennt man die infinitesimalen Transformationen $X_\varkappa f$ und somit auch die Constanten $c_{i\varkappa s}$, so kann man alle Untergruppen der Gruppe $X f$ durch algebraische Operationen finden. Namentlich gestaltet sich die Bestimmung der *invarianten* Untergruppen sehr einfach; man braucht nur zu beachten, dass in einer invarianten Untergruppe, in

welcher die infinitesimale Transformation Yf vorkommt, auch alle Transformationen von der Form $(X_\varkappa Y)$ enthalten sein müssen.

Wir nennen das System der Constanten $c_{i\varkappa s}$ nach Lie einfach die *Zusammensetzung* der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$.

Die Jacobi'sche Identität

$$((X_i X_j) X_\varkappa) + ((X_j X_\varkappa) X_i) + ((X_\varkappa X_i) X_j) = 0,$$

welche zwischen drei beliebigen infinitesimalen Transformationen $X_i f$, $X_\varkappa f$, $X_j f$ besteht, liefert folgende Relationen zwischen den $c_{i\varkappa s}$:

$$\sum_1^r{}_s (c_{ijs}\, c_{s\varkappa\nu} + c_{j\varkappa s}\, c_{si\nu} + c_{\varkappa is}\, c_{sj\nu}) = 0$$
$$(i, j, \varkappa, \nu = 1 \ldots r).$$

Soll daher ein System der $c_{i\varkappa s}$ die Zusammensetzung einer Gruppe darstellen, so muss es nothwendig die eben geschriebenen Relationen befriedigen. Sind umgekehrt diese Gleichungen erfüllt, so giebt es, wie Lie zeigt, auch stets r-gliedrige Gruppen, welche die betreffende Zusammensetzung haben. Lie giebt überdiess Methoden, um alle transitiven Gruppen von gegebener Zusammensetzung aufzustellen.

Hat man zwei r-gliedrige Gruppen $X_1 f \ldots X_r f$ und $Y_1 f \ldots Y_r f$, zu welchen ein und dasselbe System der $c_{i\varkappa s}$ gehört:

$$(4) \qquad (X_i X_\varkappa) = \sum_1^r{}_s c_{i\varkappa s} X_s f, \quad (Y_i Y_\varkappa) = \sum_1^r{}_s c_{i\varkappa s} Y_s f,$$

so nennt man die beiden Gruppen *gleichzusammengesetzt* oder *holoedrisch isomorph.*

Andererseits sei zwar die Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ r-gliedrig, aber die Gruppe $Y_1 f \ldots Y_r f$ bloss m-gliedrig, so dass also unter den $Y_\varkappa f$ nur m von einander unabhängige Transformationen vorhanden sind. Bestehen dann die Gleichungen (4), so sagt man, dass die Gruppe $Y_\varkappa f$ mit der Gruppe $X_\varkappa f$ *meroedrisch isomorph* ist. Unter den eben gemachten Voraussetzungen sind $Y_1 f \ldots Y_r f$ durch $r - m$ von einander unabhängige Relationen von der Form

$$(5) \qquad \sum_1^r{}_\varkappa g_{\varkappa\mu}\, Y_\varkappa f = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots r - m)$$

verknüpft. Der Ausdruck

$$\left(Y_i, \sum_1^r{}_\varkappa g_{\varkappa\mu}\, Y_\varkappa f\right) = \sum_1^r{}_s \sum_1^r{}_\varkappa g_{\varkappa\mu}\, c_{i\varkappa s}\, Y_s f$$

muss dann vermöge der Gleichungen (5) verschwinden d. h. es bestehen Gleichungen von der Form:

$$\left(Y_i, \sum_1^r{}_\varkappa\, g_{\varkappa\mu}\, Y_\varkappa f\right) = \sum_1^{r-m}{}_\nu\, h_{i\mu\nu} \sum_1^r{}_\varkappa\, g_{\varkappa\nu}\, Y_\varkappa f$$

und zwar müssen dieselben eine directe Folge der Gleichungen (4) sein. Daraus ergiebt sich, dass die infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^r{}_\varkappa\, g_{\varkappa\mu}\, X_\varkappa f \qquad (\mu = 1 \ldots r - m),$$

welche offenbar von einander unabhängig sind, eine $(r-m)$gliedrige invariante Untergruppe der r-gliedrigen Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ erzeugen.

Aus dem Gesagten erkennt man leicht, *wie man die Zusammensetzungen aller Gruppen findet, welche mit einer vorgelegten r-gliedrigen Gruppe* $X_1 f \ldots X_r f$ *meroedrisch isomorph sind.*

Es seien

$$\sum_1^r{}_\varkappa\, g_{\varkappa\mu}\, X_\varkappa f \qquad (\mu = 1 \ldots r - m)$$

unabhängige infinitesimale Transformationen einer $(r-m)$gliedrigen invarianten Untergruppe der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$. Zwischen den infinitesimalen Transformationen $Y_1 f \ldots Y_r f$ setze man die Relationen

$$\sum_1^r{}_\varkappa\, g_{\varkappa\mu}\, Y_\varkappa f = 0 \qquad (\mu = 1 \ldots r - m)$$

fest, welche etwa $Y_{m+1} f \ldots Y_r f$ durch die übrigen $Y_\varkappa f$ auszudrücken gestatten mögen. Setzt man die so gefundenen Werthe von $Y_{m+1} f \ldots Y_r f$ in die Relationen

$$(Y_i\, Y_\varkappa) = \sum_1^r{}_s\, c_{i\varkappa s}\, Y_s f$$

ein, so erhält man alle $(Y_i\, Y_\varkappa)$ durch $Y_1 f \ldots Y_m f$ ausgedrückt und bekommt somit die Zusammensetzung einer m-gliedrigen Gruppe $Y_1 f \ldots Y_m f$, welche offenbar mit der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ meroedrisch isomorph ist.

Auf diese Weise hat man nach und nach alle invarianten Untergruppen der Gruppe $X_1 f \ldots X_r f$ durchzugehen.

Enthält eine Transformationsgruppe gar keine invarianten Untergruppen, so heisst sie *einfach*. Eine mit ihr meroedrisch isomorphe Gruppe kann dann keine infinitesimale Transformation enthalten d. h. sie besteht nur aus der identischen Transformation $x_i' = x_i$.

Nach diesen Vorbemerkungen, welche dazu bestimmt waren in die Theorie der Transformationsgruppen überhaupt einzuführen, schalten

wir noch einige allgemeine Bemerkungen über die vorliegende Abhandlung ein.

Es soll in dieser Abhandlung eine neue Methode entwickelt werden, vermittelst deren Definitionsgleichungen von Gruppen von infinitesimalen Transformationen bestimmt werden können.

Lie hat an mehreren Stellen der erwähnten Abhandlung „Ueber unendliche Gruppen" direct einige Definitionsgleichungen in der Ebene berechnet. Er verlangt einfach, dass mit ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 gleichzeitig auch

$$\xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \xi_1}{\partial y},$$

$$\xi_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \eta_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial y}$$

ein Lösungssystem der betreffenden Differentialgleichungen ist, und erhält auf diese Weise Relationen, aus welchen sich die Coefficienten der Differentialgleichungen ermitteln lassen. Allerdings führt dieses Verfahren auf recht weitläufige Rechnungen (vgl. Ueber unendliche Gruppen § 6).

Die Methode, welche hier auseinandergesetzt werden soll, ist allgemeiner. Schon längst vermuthete ich, dass sie alle Definitionsgleichungen von Gruppen liefert, da überraschte mich Lie eines Tages mit einem Beweise dieser meiner Vermuthung. Leider muss ich auf eine Reproduction dieses Beweises verzichten, weil dieselbe zuviel Raum in Anspruch nehmen würde.

Natürlich werden wir fast nur solche Gruppen finden, welche schon aus den Lie'schen Untersuchungen bekannt sind. Das Interesse der nachfolgenden Entwickelungen kann daher in der Hauptsache nur in der Eigenthümlichkeit der Methode und ausserdem noch in der Form der Resultate liegen.

Lie betrachtet nämlich alle ähnlichen Gruppen als gleichberechtigt. Es kommt ihm nur darauf an, Normalformen für die verschiedenen Gruppentypen aufzustellen, soweit dieselben nicht durch Variabelnänderung in einander übergehen können. Er sucht immer den Repräsentanten jedes solchen Typus; mit dem Repräsentanten ist ja die ganze Schaar der ähnlichen, also aller Gruppen, welche dem Typus angehören, implicite gegeben.

Aber es kann seine Vortheile haben auch einmal einen andern Gesichtspunkt in den Vordergrund treten zu lassen. Wir werden daher keine Normalformen suchen, sondern auch die Gruppen, welche mit den Lie'schen Normalformen ähnlich sind, sämmtlich explicite angeben. Wir wünschen nicht die einfachsten Formen der Definitionsgleichungen zu kennen, wir verlangen vielmehr für jede Schaar von gleichberechtigten Gruppen die allgemeine Form der Definitionsgleichungen, aus welcher

dann jede einzelne Gruppe der Schaar durch Specialisirung erhalten wird.

Soviel über die Form, in welcher sich uns die Gruppen darstellen werden. Nebenbei werden wir aber noch einige Resultate für die Integration von Definitionsgleichungen gewinnen. Unter Umständen lässt sich nämlich a priori die Existenz gewisser Integrale erkennen; zur Aufstellung derselben werden wir Mittel angeben. Damit gelangen wir mehrfach zu denselben Integrationsvereinfachungen, welche Lie auf anderem Wege erreicht hat.

Aus leicht erkennbaren Gründen beginnen wir mit dem einfachsten Fall, wir betrachten zuerst die einfache Mannigfaltigkeit. Die Entwickelung der Theorie bietet hier die wenigsten Schwierigkeiten und lässt sich auch zu einem gewissen Abschluss bringen.

§ 1.

Allgemeines über die einfache Mannigfaltigkeit.

1. Der Gedankengang, welcher mich ursprünglich zu den nachstehenden Entwickelungen geführt hat, war kurz der folgende.

Denken wir uns irgend eine Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit vorgelegt und ausserdem alle mit ihr ähnlichen Gruppen aufgestellt.

Die ursprüngliche Gruppe wird durch eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^n\xi}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d\xi}{dx} + a_n(x)\xi = 0$$

definirt. Ebenso wird sich auch der Inbegriff aller Gruppen, welche mit der ursprünglichen ähnlich sind, durch eine Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^n\xi}{dx^n} + B_1\frac{d^{n-1}\xi}{dx^{n-1}} + \cdots + B_{n-1}\frac{d\xi}{dx} + B_n\xi = 0$$

definiren lassen, nur dass in derselben die Coefficienten B von einer willkürlichen Function etwa $\alpha(x)$ und von deren Differentialquotienten abhängen.

Es liegt auf der Hand, dass die betreffende Schaar von Gruppen bei Einführung einer neuen Variabeln $x_1 = F(x)$ invariant bleibt; jede Gruppe der Schaar geht ja dabei in eine mit ihr ähnliche über und diese gehört ebenfalls der Schaar an. Da nun der Werth, welchen die Function $\alpha(x)$ besitzt, in (1) die einzelne Gruppe bestimmt und andererseits die einzelnen Gruppen bei Einführung der neuen Variablen x_1 unter einander vertauscht werden, muss $\alpha(x)$ in eine neue Function $\alpha_1(x_1)$ übergehen. Zwischen α, α_1, F und ihren Differentialquotienten

müssen also analytische Beziehungen bestehen, vermöge deren sich α_1 aus α und F bestimmen lässt.

Insbesondere kann der Fall eintreten, dass α_1 sich analytisch durch α und durch F mit seinen Differentialquotienten etwa bis zur n^{ten} Ordnung ausdrückt:

$$\alpha_1 = \chi(\alpha, F, F' \ldots F^{(n)});$$

wir wollen ausserdem noch annehmen, dass die Function χ keine willkürlichen Constanten enthält. Unter dieser Voraussetzung ist α_1 vollständig bestimmt, wenn α und F gegeben sind und ebenso ist umgekehrt α vollständig bestimmt, wenn man α_1 und F kennt.

Die Gleichungen

$$x_1 = F(x), \quad \alpha_1 = \chi(\alpha, F, F' \ldots F^{(n)}) \tag{2}$$

bilden nun eine *unendliche Transformationsgruppe*. Hat man nämlich:

$$x_2 = \Phi(x_1), \quad \alpha_2 = \chi(\alpha_1, \Phi, \Phi' \ldots \Phi^{(n)}),$$

so bekommt man $x_2 = \Phi(F(x))$ und also:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \chi(\alpha, \ \Phi(F), \ \Phi'(F)F' \ldots) \\ &= \chi(\alpha_1, \Phi, \Phi' \ldots \Phi^{(n)}), \end{aligned}$$

worin eben liegt, dass die Gleichungen (2) eine unendliche Gruppe darstellen.

Ebenso bestimmen auch die Gleichungen

$$x_1 = F(x), \quad \xi_1 = \xi F'(x), \quad \alpha_1 = \chi(\alpha, F, F' \ldots F^{(n)}) \tag{3}$$

eine unendliche Gruppe, bei welcher offenbar die Differentialgleichung (1) der oben besprochenen Schaar von Gruppen invariant bleibt.

Die identische Transformation der unendlichen Gruppe (2) erhalten wir für $x_1 = x$, denn dann bleibt ja jede einzelne Gruppe der Schaar (1) invariant; für $x_1 = x$ muss also auch $\alpha_1 = \alpha$ werden. Weiter ergeben sich die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (2), wenn man $x_1 = x + \varphi(x)\delta t$ setzt, unter δt eine infinitesimale Grösse verstanden. Dabei wird etwa:

$$\alpha_1 = \alpha + \Omega(\alpha, \varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n)})\delta t,$$

wo die Glieder zweiter und höherer Ordnung weggelassen sind. Die Function Ω verschwindet offenbar, wenn die willkürliche Function φ gleich Null gesetzt wird. Mit Anwendung der Lie'schen Bezeichnungsweise lassen sich nun die infinitesimalen Transformationen der Gruppe (2) folgendermassen schreiben:

$$\varphi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \Omega(\alpha, \varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n)})\frac{\partial f}{\partial \alpha}. \tag{4}$$

Ist $x_1 = x + \varphi\,\delta t$, so wird

$$\xi_1 = \xi + \xi\varphi'\,\delta t;$$

die infinitesimalen Transformationen der unendlichen Gruppe (3) werden somit:

$$(5) \qquad \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \xi\varphi'\frac{\partial f}{\partial \xi} + \Omega(\alpha, \varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n)})\frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Die Ausdrücke (4) und (5) stellen natürlich zwei unendliche Gruppen von infinitesimalen Transformationen dar und zwar lässt die zweite dieser beiden Gruppen die Differentialgleichung (1) invariant.

Was die Form der Function Ω anbetrifft, so ist leicht zu sehen, dass Ω in den $\varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n)}$ linear und homogen sein muss. Ist nämlich

$$\psi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \Omega(\alpha, \psi, \psi' \ldots \psi^{(n)})\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine zweite infinitesimale Transformation der Gruppe (4), so gehört auch jede Transformation von der Gestalt

$$(a\varphi + b\psi)\frac{\partial f}{\partial x} + (a\,\Omega(\alpha, \varphi \ldots) + b\,\Omega(\alpha, \psi \ldots))\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

der Gruppe an. Diese Transformation muss daher die Form

$$(a\varphi + b\psi)\frac{\partial f}{\partial x} + \Omega(\alpha, a\varphi + b\psi \ldots a\varphi^{(n)} + b\psi^{(n)})\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

besitzen und da ausserdem $\Omega(\alpha, \varphi \ldots)$ gleichzeitig mit φ verschwindet, so ergiebt sich, dass $\Omega(\alpha, \varphi \ldots)$ die Gestalt hat:

$$\Omega(\alpha, \varphi \ldots \varphi^{(n)}) = a_0\varphi + a_1\varphi' + \cdots + a_n\varphi^{(n)},$$

wo die Coefficienten a_i nur von α abhängen, aber auch keine willkürlichen Constanten enthalten.

2. Ich bemerkte bald, dass überhaupt zu jeder unendlichen Gruppe von infinitesimalen Transformationen, welche die Form (4) besitzt, eine Differentialgleichung von der Form (1) gehört, welche eine unendliche Schaar von Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit definirt. Für dieses Resultat, welches ich durch Rechnung gefunden hatte, erkannte Lie den inneren Grund. Wir geben zunächst den Lie'schen Gedankengang wieder.

Die infinitesimalen Transformationen

$$(6) \qquad \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n a_i(\alpha)\varphi^{(i)}\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

mit der willkürlichen Function $\varphi(x)$ mögen eine unendliche Gruppe bilden. Es sei ferner $\alpha(x)$ irgend eine beliebig wählbare Function von x. Lie sucht nun unter den infinitesimalen Transformationen (6) diejenigen auf, welche die Gleichung $\alpha - \alpha(x) = 0$ invariant lassen. Der Inbegriff aller dieser Transformationen muss eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen bilden (vgl. Einleitung unter E).

Wenn man die infinitesimale Transformation (6) auf den Ausdruck $\alpha - \alpha(x)$ ausführt, so erhält man:

$$\sum_0^n{}_i \, a_i(\alpha)\, \varphi^{(i)} - \alpha'(x)\, \varphi .$$

Soll nun die Gleichung $\alpha - \alpha(x) = 0$ bei einer Transformation von der Form (6) invariant bleiben, so muss der eben gefundene Ausdruck vermöge $\alpha - \alpha(x) = 0$ verschwinden (vgl. Einleitung unter E) d. h. die Function φ muss eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_0^n{}_i \, a_i(\alpha(x))\, \varphi^{(i)} - \alpha'(x)\, \varphi = 0$$

sein. Setzt man daher in (6) an die Stelle von φ die allgemeine Lösung der erhaltenen Differentialgleichung, so bekommt man die gewünschte Gruppe von infinitesimalen Transformationen.

Die gefundene Gruppe enthält die zwei Variabeln x und α. Wichtiger ist jedoch eine damit eng zusammenhängende Gruppe in der Variabeln x allein. Die Differentialgleichung für φ besitzt nämlich augenscheinlich die Eigenschaft, dass sich aus zweien ihrer Lösungen, etwa φ und ψ stets eine dritte Lösung von der Form $\varphi\psi' - \psi\varphi'$ zusammensetzen lässt. Versteht man daher unter φ die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung, so stellt auch $\varphi \frac{df}{dx}$ eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen dar. Diese Gruppe ist offenbar endlich und erzeugt daher auch eine endliche Transformationsgruppe. Also hat Lie ohne Weiteres den Satz:

Satz 1. *Stellt der Ausdruck*

$$\varphi(x)\, \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}_i \, a_i(\alpha)\, \varphi^{(i)}\, \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen dar, so definirt die Differentialgleichung

$$\sum_0^n{}_i \, a_i(\alpha)\, \xi^{(i)} - \alpha'\, \xi = 0, \tag{7}$$

wenn darin für α irgend eine Function von x gesetzt wird, eine endliche Gruppe der einfachen Mannigfaltigkeit.

Die Art und Weise, in welcher Lie zu diesem Satze gelangt, lässt, wie man sieht, an Einfachheit und Kürze nichts zu wünschen übrig.

Mein ursprünglicher Beweis ging darauf aus, durch Rechnung zu beweisen, dass die Gleichung (7) eine Gruppe definirt. Der Beweis hat auch jetzt noch ein gewisses Interesse, namentlich wegen der

Endformel, welche sich ergiebt. Er mag deshalb hier noch seine Stelle finden.

Zur Abkürzung schreiben wir $U(\alpha, \varphi)$ für $\sum a_i(\alpha)\, \varphi^{(i)}$. Die unendliche Gruppe (6) nimmt dann die Form an

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Ist ferner

$$\psi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \psi) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine andere infinitesimale Transformation der Gruppe, so gehört auch

$$(\varphi\psi' - \psi\varphi') \frac{\partial f}{\partial x} + \left\{ \varphi \sum_0^n{}_i \frac{\partial U(\alpha, \psi)}{\partial \psi^{(i)}} \psi^{(i+1)} - \psi \sum_0^n{}_i \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^{(i)}} \varphi^{(i+1)} + \right.$$
$$\left. + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial U(\alpha, \psi)}{\partial \alpha} - U(\alpha, \psi) \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha} \right\} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

der Gruppe an (Einleitung unter C); der Coefficient, welchen $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ in dieser Transformation hat, muss daher die Form $U(\alpha, \varphi\psi' - \psi\varphi')$ besitzen.

Um den Ausdruck für $U(\alpha, \varphi\psi' - \psi\varphi')$ möglichst kurz schreiben zu können, führen wir folgende Bezeichnungen ein. Wir setzen:

$$\sum_0^n{}_i \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^{(i)}} \varphi^{(i+1)} = \frac{d' U(\alpha, \varphi)}{dx}$$

und

$$\sum_0^n{}_i \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \varphi^{(i)}} \varphi^{(i+1)} + \alpha' \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha} = \frac{dU(\alpha, \varphi)}{dx},$$

so dass also

$$\frac{d' U(\alpha, \varphi)}{dx} = \frac{dU(\alpha, \varphi)}{dx} - \alpha' \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha}$$

wird. Unter α' verstehen wir dabei den Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{dx}$ von α, indem wir x als unabhängige und α als abhängige Variable betrachten.

Nach diesen Festsetzungen bekommen wir die Identität:

$$U(\alpha, \varphi\psi' - \psi\varphi') \equiv \varphi \frac{d' U(\alpha, \psi)}{dx} - \psi \frac{d' U(\alpha, \varphi)}{dx} +$$
$$+ U(\alpha, \varphi) \frac{\partial U(\alpha, \psi)}{\partial \alpha} - U(\alpha, \psi) \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha},$$

oder nach einer einfachen Umformung:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} U(\alpha, \varphi\psi' - \psi\varphi') \equiv \varphi \frac{dU(\alpha, \psi)}{dx} - \psi \frac{dU(\alpha, \varphi)}{dx} + \\ \quad + \frac{\partial U(\alpha, \psi)}{\partial \alpha} \{ U(\alpha, \varphi) - \alpha' \varphi \} - \frac{\partial U(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha} \{ U(\alpha, \psi) - \alpha' \psi \}. \end{array} \right.$$

Subtrahiren wir endlich hiervon die Identität

$$\alpha'(\varphi\psi' - \psi\varphi') \equiv \alpha'\varphi\psi' + \alpha''\varphi\psi - \alpha'\psi\varphi' - \alpha''\psi\varphi,$$

so ergiebt sich die wichtige Formel:

$$(9)\quad \begin{cases} U(\alpha, \varphi\psi' - \psi\varphi') - \alpha'(\varphi\psi' - \psi\varphi') \\ \quad \equiv \varphi \frac{d}{dx}(U(\alpha,\psi) - \alpha'\psi) - \psi \frac{d}{dx}(U(\alpha,\varphi) - \alpha'\varphi) + \\ \quad + \frac{\partial U(\alpha,\psi)}{\partial\alpha}\{U(\alpha,\varphi) - \alpha'\varphi\} - \frac{\partial U(\alpha,\varphi)}{\partial\alpha}\{U(\alpha,\psi) - \alpha'\psi\}. \end{cases}$$

In dieser Formel liegt nun der Beweis des Satzes 1. Denken wir uns nämlich für α eine beliebige Function von x gesetzt und setzen wir voraus, dass $\xi = \varphi$ und $\xi = \psi$ zwei Lösungen der Differentialgleichung (7) sind, so verschwindet die rechte Seite von (9) identisch. Da in Folge dessen zugleich die linke Seite verschwindet, so ist auch $\varphi\psi' - \psi\varphi'$ eine Lösung von (7) und diess war zu beweisen.

3. *Wir werden jetzt zeigen, dass die Differentialgleichung*

$$(10)\qquad U(\alpha, \xi) - \alpha'\xi = 0$$

die unendliche Gruppe der infinitesimalen Transformationen

$$(11)\qquad \varphi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + \xi\varphi'\frac{\partial f}{\partial \xi} + U(\alpha, \varphi)\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

gestattet.

Vom Lie'schen Standpunkte aus gestaltet sich der Beweis kurz wie folgt: Die Gleichung (10) definirt, wie wir oben sahen, diejenigen unter den infinitesimalen Transformationen

$$\chi(x)\frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \chi)\frac{\partial f}{\partial \alpha},$$

welche die Gleichung $\alpha - \alpha(x) = 0$ invariant lassen, unter $\alpha(x)$ irgend welche Function von x verstanden. Nimmt nun $\alpha - \alpha(x) = 0$ bei Ausführung der infinitesimalen Transformation (11) oder:

$$(11')\quad x_1 = x + \varphi(x)\delta t, \quad \xi_1 = \xi + \xi\varphi'\delta t, \quad \alpha_1 = \alpha + U(\alpha, \varphi)\delta t$$

die Form $\alpha_1 - \alpha_1(x_1) = 0$ an, so müssen die durch (10) definirten infinitesimalen Transformationen sich in diejenigen Transformationen

$$\psi(x_1)\frac{\partial f}{\partial x_1} + U(\alpha_1, \psi)\frac{\partial f}{\partial \alpha_1}$$

verwandeln, welche $\alpha_1 - \alpha_1(x_1) = 0$ invariant lassen. Also geht die Gleichung (10) bei Ausführung der infinitesimalen Transformation (11') über in:

$$U(\alpha_1, \xi_1) - \alpha_1'\xi_1 = 0.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Mein älterer Beweis wird vielleicht den einen oder den anderen

Leser mehr befriedigen als der eben entwickelte. Mein Verfahren war einfach das folgende.

Den Variabeln x, ξ und α wurden die Incremente

$$\delta x = \varphi \delta t, \quad \delta \xi = \xi \varphi' \delta t, \quad \delta \alpha = U(\alpha, \varphi) \delta t$$

ertheilt und es war nunmehr das Increment von $U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi$ zu berechnen.

Aus $d\alpha - \alpha' dx = 0$ ergab sich:

$$\delta \alpha' = \frac{d}{dx} \delta \alpha - \alpha' \frac{d}{dx} \delta x = \left(\frac{d}{dx} U(\alpha, \varphi) - \alpha' \varphi' \right) \delta t.$$

Ebenso wurde

$$\frac{\delta \xi'}{\delta t} = \xi \varphi'', \quad \frac{\delta \xi''}{\delta t} = \xi \varphi''' + \xi' \varphi'' - \xi'' \varphi' \text{ u. s. w.}$$

Durch die Bemerkung, dass sich schreiben liess:

$$\frac{\delta \xi}{\delta t} = \xi' \varphi + (\xi \varphi' - \varphi \xi'), \quad \frac{\delta \xi'}{\delta t} = \xi'' \varphi + \frac{d}{dx} (\xi \varphi' - \varphi \xi'),$$

$$\frac{\delta \xi''}{\delta t} = \xi'' \varphi + \frac{d^2}{dx^2} (\xi \varphi' - \varphi \xi'),$$

wurde man auf die Vermuthung geführt, dass allgemein die Formel

$$\frac{\delta \xi^{(i)}}{\delta t} = \xi^{(i+1)} \varphi + \frac{d^i}{dx^i} (\xi \varphi' - \varphi \xi')$$

gelten möchte. Wirklich erhielt man auch aus der Gleichung

$$d\xi^{(i)} - \xi^{(i+1)} dx = 0$$

wieder:

$$\frac{\delta \xi^{(i+1)}}{\delta t} = \xi^{(i+2)} \varphi + \xi^{(i+1)} \varphi' + \frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}} (\xi \varphi' - \varphi \xi') - \xi^{(i+1)} \varphi'$$

$$= \xi^{(i+2)} \varphi + \frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}} (\xi \varphi' - \varphi \xi'),$$

womit die Allgemeingültigkeit der vermutheten Formel nachgewiesen war.

Nunmehr konnte das gewünschte Increment berechnet werden. Da ξ und seine Differentialquotienten in $U(\alpha, \xi)$ nur linear und homogen vorkommen, ergab sich:

$$\frac{\delta}{\delta t} (U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi) = \frac{d'}{dx} U(\alpha, \xi) \cdot \varphi + U(\alpha, \xi \varphi' - \varphi \xi') -$$

$$- \alpha' \xi \varphi' + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial}{\partial \alpha} U(\alpha, \xi) - \xi \left(\frac{d}{dx} U(\alpha, \varphi) - \alpha' \varphi' \right).$$

Hier liess sich die rechte Seite vermittelst der Identität (8) umformen und man kam auf die einfache Formel:

$$(12) \qquad \frac{\delta}{\delta t} (U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi) = \frac{\partial}{\partial \alpha} U(\alpha, \varphi) \{ U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi \}.$$

Diese Formel zeigte deutlich, dass die Gleichung

$$U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi = 0$$

die infinitesimalen Transformationen (11) gestattet.

Wir haben also den Satz:

Satz 2. *Bilden die infinitesimalen Transformationen*

$$\varphi(x) \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}^i a_i(\alpha) \varphi^{(i)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine unendliche Gruppe, so gestattet die Gleichung

$$\sum_0^n{}^i a_i(\alpha) \xi^{(i)} - \alpha' \xi = 0$$

die unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen

$$\varphi(x) \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \varphi' \frac{\partial f}{\partial \xi} + \sum_0^n{}^i a_i(\alpha) \varphi^{(i)} \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

4. Die Differentialgleichung (10) gestattet, wie wir eben gesehen haben, die infinitesimalen Transformationen

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\delta x}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\delta \xi}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \cdots + \frac{\delta \xi^{(n)}}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \xi^{(n)}} + \frac{\delta \alpha}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\delta \alpha'}{\delta t} \frac{\partial f}{\partial \alpha'} \\ \frac{\delta x}{\delta t} = \varphi(x), \quad \frac{\delta \xi}{\delta t} = \xi \varphi', \quad \frac{\delta \alpha}{\delta t} = U(\alpha, \varphi). \end{cases}$$

Im Raume der Variabeln x, $\xi \ldots \xi^{(n)}$, α, α' haben wir uns die Gleichung (10) als eine Mannigfaltigkeit vorzustellen, welche bei den Transformationen (13) invariant bleibt, während ihre Punkte untereinander vertauscht werden. Es ist nun sehr gut denkbar, dass die Punkte dieser Mannigfaltigkeit sich ihrerseits in unendlich viele Mannigfaltigkeiten anordnen lassen, welche einzeln bei den Transformationen (13) invariant bleiben. Analytisch ausgedrückt heisst diess: es kann eine Function von x, $\xi \ldots \xi^{(n)}$, α, α' existiren, welche bei Berücksichtigung der Gleichung (10) die Transformationen (13) gestattet. Denkt man sich etwa $\xi^{(n)}$ vermittelst der Gleichung (10) eliminirt, so handelt es sich einfach um die Existenz einer Function

$$\Omega(x, \xi, \xi' \ldots \xi^{(n-1)}, \alpha, \alpha'),$$

welche die Transformationen (13) zulässt.

Existirt eine solche Function Ω, *so stellt dieselbe gleich Constans gesetzt stets ein Integral der Gleichung* (10) *dar.* Diess werden wir jetzt beweisen.

Die Function $\Omega(x, \xi \ldots \alpha')$ ist nach Voraussetzung eine Lösung der Gleichung

$$(14)\quad \frac{\delta x}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\delta \xi}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \xi}+\cdots+\frac{\delta \xi^{(n-1)}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \xi^{(n-1)}}+\frac{\delta \alpha}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\delta \alpha'}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \alpha'}=0.$$

Diese Gleichung zerlegt sich wegen der Willkürlichkeit von $\frac{\delta x}{\delta t}=\varphi(x)$ in eine Reihe von Differentialgleichungen, denn die Coefficienten von $\varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(n+1)}$ müssen ja einzeln verschwinden. Da $\varphi^{(n+1)}$ einzig und allein in $\frac{\delta \alpha'}{\delta t}$ vorkommt, ergiebt sich sofort $\frac{\partial f}{\partial \alpha'}=0$, in den etwaigen Lösungen von (14) ist also jedenfalls α' nicht enthalten: Dagegen muss α nothwendig vorkommen. Wäre nämlich $\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0$, so käme $\varphi^{(n)}$ bloss in $\frac{\delta \xi^{(n-1)}}{\delta t}$ vor, also müsste $\frac{\partial f}{\partial \xi^{(n-1)}}$ verschwinden. Ebenso wäre $\frac{\partial f}{\partial \xi^{(n-2)}}=0$ u. s. w., kurz die Gleichung (14) hätte nur die nichtssagende Lösung $f=$ const.

Es sei nun $\Omega(x, \xi \ldots \xi^{(n-1)}, \alpha)$ eine Lösung von (14) und also $\frac{\delta \Omega}{\delta t}$ identisch gleich Null. Mit Benutzung des früher gefundenen Ausdruckes für $\frac{\delta \xi^{(i)}}{\delta t}$ haben wir dann:

$$\frac{\delta \Omega}{\delta t}=\varphi\frac{d\Omega}{dx}-\varphi\alpha'\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}+\sum_0^{n-1 i}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi^{(i)}}\frac{d^i}{dx^i}(\xi\varphi'-\varphi\xi')+$$
$$+U(\alpha,\varphi)\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\equiv 0.$$

Setzen wir hierin $\varphi=\xi$, so kommt:

$$\xi\frac{d\Omega}{dx}+\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha}\{U(\alpha,\xi)-\alpha'\xi\}\equiv 0,$$

so dass also die Gleichung $\frac{d\Omega}{dx}=0$ sich von der Gleichung (10) nur um einen nicht verschwindenden Factor unterscheidet. Wirklich ist demnach $\Omega=$ const. ein Integral der Differentialgleichung (10):

Satz 3. *Bilden die infinitesimalen Transformationen*

$$\varphi\frac{\partial f}{\partial x}+\xi\varphi'\frac{\partial f}{\partial \xi}+\sum_0^{n i}a_i(\alpha)\varphi^{(i)}\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

eine unendliche Gruppe und ist $\Omega(x, \xi, \xi' \ldots \xi^{(n-1)}, \alpha)$ *eine Lösung der Differentialgleichung*

$$(15)\quad \frac{\delta x}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\delta \xi}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \xi}+\cdots+\frac{\delta \xi^{(n-1)}}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \xi^{(n-1)}}+\frac{\delta \alpha}{\delta t}\frac{\partial f}{\partial \alpha}=0,$$

$$\frac{\delta x}{\delta t}=\varphi,\quad \frac{\delta \xi}{\delta t}=\xi\varphi',\quad \frac{\delta \alpha}{\delta t}=\sum_0^{n i}a_i(\alpha)\varphi^{(i)},$$

so ist

$$\Omega(x, \xi, \xi' \ldots \xi^{(n-1)}, \alpha) = \text{const.}$$

ein Integral der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung:

$$\sum_0^n a_i(\alpha)\, \xi^{(i)} - \alpha' \xi = 0\,.$$

Zum Schlusse noch eine Bemerkung, welche für das Folgende von Wichtigkeit ist. Wir werden nämlich zeigen, dass *man in der unendlichen Gruppe*

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

an Stelle von α die neue Variable

$$\alpha_1 = \omega(\alpha) + \pi(x) \tag{16}$$

einführen kann, ohne dass diess auf die Differentialgleichung

$$U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi = 0$$

einen wesentlichen Einfluss hat. Die Functionen ω und π bedeuten dabei willkürliche Functionen ihrer Argumente.

Bei Einführung der neuen Variabeln α_1 nimmt unsere unendliche Gruppe die Form an:

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \{\varphi . \pi'(x) + U(\alpha, \varphi)\omega'(\alpha)\} \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}.$$

Hieraus ergiebt sich nun die Differentialgleichung

$$\xi \pi'(x) + U(\alpha, \xi)\, \omega'(\alpha) - (\omega'(\alpha)\, \alpha' + \pi'(x))\, \xi = 0,$$

also bei Weglassung des Factors $\omega'(\alpha)$ wieder die alte Differentialgleichung

$$U(\alpha, \xi) - \alpha' \xi = 0.$$

Wir sehen daraus, dass zwei unendliche Gruppen von der Form

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha} \tag{17}$$

stets dieselbe Schaar von Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit liefern, wenn sie durch eine Transformation von der Form (16) mit einander ähnlich sind. *Wir werden in Folge dessen im nächsten Paragraphen, wo wir die verschiedenen unendlichen Gruppen* (17) *bestimmen, nicht alle diese Gruppen aufzustellen brauchen, sondern nur die einfachsten Normalformen aller verschiedenen Typen, welche nicht durch Transformationen von der Form* (16) *in einander übergeführt werden können.*

§ 2.

Die einzelnen Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit.

5. Zunächst wenden wir uns dazu, *alle unendlichen Gruppen von infinitesimalen Transformationen*

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

zu bestimmen.

Die allgemeine infinitesimale Transformation einer solchen Gruppe hat die Form:

$$Xf = \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + (a_0(\alpha)\varphi + a_1(\alpha)\varphi' + \cdots + a_n(\alpha)\varphi^{(n)}) \frac{\partial f}{\partial \alpha},$$

wo die Coefficienten Functionen von α sind aber keine willkürlichen Constanten enthalten. Führen wir für die infinitesimale Transformation $a_i \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ allgemein das Symbol $A_i f$ ein, so erhalten wir:

$$Xf = \varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}^i A_i f \cdot \varphi^{(i)}.$$

Eine andere infinitesimale Transformation der Gruppe sei:

$$Yf = \psi \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}^i A_i f \cdot \psi^{(i)}.$$

Wir bilden nun die Transformation (XY) oder wie wir in Zukunft kurz sagen wollen: wir *combiniren* die beiden Transformationen Xf und Yf mit einander. Die Transformation (XY) muss dann wieder der Gruppe angehören, also muss werden:

$$(1) \qquad (XY) = (\varphi\psi' - \psi\varphi') \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}^i A_i f \frac{d^i}{dx^i} (\varphi\psi' - \psi\varphi').$$

Auf der andern Seite aber ergiebt sich bei directer Ausrechnung:

$$(2)\ X(Y(f)) - Y(X(f)) = (\varphi\psi' - \psi\varphi') \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_0^n{}^i A_i f (\varphi\psi^{(i+1)} - \psi\varphi^{(i+1)})$$
$$+ \sum_0^{n-1}{}^i \sum_{i+1}^n{}^x (A_i A_x)(\varphi^{(i)}\psi^{(x)} - \psi^{(i)}\varphi^{(x)}).$$

Die beiden Gleichungen (1) und (2) müssen übereinstimmen. Diese Forderung drückt sich durch eine Gleichung von der Form:

$$\sum_0^{n-1}{}^i \sum_{i+1}^n{}^x g_{ix} (\varphi^{(i)}\psi^{(x)} - \psi^{(i)}\varphi^{(x)}) = 0$$

aus, in welcher die g_{ix} von x unabhängig sind. Da aber φ und ψ vollkommen willkürlich sind, überzeugt man sich ohne Schwierigkeit, dass diese Gleichung nur dann bestehen kann, wenn alle g_x verschwinden.

Um für den vorliegenden Fall die Ausdrücke g_{ix} zu berechnen, müssen wir zunächst die rechte Seite von (1) entwickeln. Mit Benutzung der bekannten Formeln

$$\frac{d^i}{dx^i}(\varphi\psi') = \varphi\psi^{(i+1)} + \frac{n}{1}\varphi'\psi^{(i)} + \frac{n(n-1)}{1.2}\varphi''\psi^{(i-1)} + \cdots$$

$$\frac{d^i}{dx^i}(\psi\varphi') = \qquad\quad \varphi'\psi^{(i)} + \quad \frac{n}{1} \quad \varphi''\psi^{(i-1)} + \cdots$$

erhalten wir:

$$\frac{d^i}{dx^i}(\varphi\psi' - \psi\varphi') = \varphi\psi^{(i+1)} + (n-1)\,\varphi'\psi^{(i)} + \\ + \left(\frac{n(n-1)}{1.2} - n\right)\varphi''\psi^{(i-1)} + \cdots$$

und hieraus durch eine leichte Umordnung:

$$\frac{d^i}{dx^i}(\varphi\psi' - \psi\varphi') = \varphi\psi^{(i+1)} - \psi\varphi^{(i+1)} + (n-1)\,(\varphi'\psi^{(i)} - \psi'\varphi^{(i)}) + \\ + \left(\frac{n(n-1)}{1.2} - n\right)(\varphi''\psi^{(i-1)} - \psi''\varphi^{(i-1)}) + \cdots.$$

Diese Reihe schliesst jenachdem i die Form $2\nu - 1$ oder 2ν hat mit einem Gliede $\varphi^{(\nu-1)}\psi^{(\nu+1)} - \psi^{(\nu-1)}\varphi^{(\nu+1)}$ oder mit einem Gliede

$$\varphi^{(\nu)}\psi^{(\nu+1)} - \psi^{(\nu)}\varphi^{(\nu+1)}.$$

Machen wir jetzt nach Einsetzung des gefundenen Ausdrucks in (1) die Vergleichung der beiden Ausdrücke für $X(Y(f)) - Y(X(f))$, so finden wir zunächst, dass sich das Glied:

$$\sum_0^n{}^i A_i f\,(\varphi\psi^{(i+1)} - \psi\varphi^{(i+1)})$$

weghebt. Weiter bekommen wir:

$$(3)\qquad \begin{cases} (A_0 A_i) &= 0 & (i=1\ldots n) \\ (A_1 A_i) &= (i-1)\,A_i & (i=2\ldots n) \\ (A_2 A_{i-1}) &= \left(\frac{i(i-1)}{1.2} - i\right)A_i & (i=3\ldots n). \end{cases}$$

Berücksichtigen wir noch, dass in (1) kein Glied $\varphi^{(\nu)}\psi^{(\pi)} - \psi^{(\nu)}\varphi^{(\pi)}$ vorkommt, in welchem die Summe $\nu + \pi$ die Zahl $n+1$ übersteigt, so haben wir:

$$(A_2 A_n) = (A_3 A_n) = \cdots = (A_{n-1} A_n) = 0 \qquad (n > 2).$$

Damit sind zwar keineswegs alle Relationen zwischen $A_0 f, A_1 f \ldots A_n f$ aufgestellt, allein wir werden sehen, dass die aufgestellten vollkommen genügen, um die infinitesimalen Transformationen $A_i f$ zu bestimmen.

6. *Am einfachsten ist natürlich der Fall* $n = 0$. Entweder ist dann $Af = 0$ oder es ist von Null verschieden. Bei der ersten Annahme erhalten wir die unendliche Gruppe

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x},$$

bei der zweiten können wir uns immer die Variable α so gewählt denken, dass $A_0 f$ die Form $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ annimmt. Auf diese Weise erhalten wir also die unendliche Gruppe:

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Allein diese ist von der eben gefundenen nicht wesentlich verschieden, denn führen wir $\alpha - x$ als neues α ein, so erhält auch sie die Form

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Jetzt können wir voraussetzen, dass n *grösser als Null ist* und dass $A_n f$ nicht verschwindet. *Wir werden zeigen, dass die Zahl* n *nicht grösser als* 3 *sein kann.*

Für $n > 2$ fanden wir oben $(A_{n-1} A_n) = 0$; da aber die infinitesimalen Transformationen $A_i f$ nur von der einen Variablen α abhängen, folgt aus $(A_{n-1} A_n) = 0$ sogleich $A_{n-1} = \lambda_{n-1} A_n$, wo λ_{n-1} eine Constante bedeutet. Wegen der Gleichungen (3) ist nun:

$$\begin{aligned}(A_1 A_{n-1}) &= (n-2) A_{n-1} = \lambda_{n-1}(n-2) A_n \\ &= \lambda_{n-1}(A_1 A_n) \;\; = \lambda_{n-1}(n-1) A_n,\end{aligned}$$

woraus, da $A_n \not\equiv 0$ ist, folgt $\lambda_{n-1} = 0$ das heisst $A_{n-1} = 0$.

Andererseits haben wir:

$$(A_2 A_{n-1}) = 0 = \left(\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} - n\right) A_n,$$

eine Gleichung, welche nur für $n = 3$ bestehen kann, weil für $n > 3$ nothwendig A_n verschwinden müsste, was ausgeschlossen ist. *Demnach ist wirklich* 3 *der höchste Werth, welchen die Zahl* n *haben kann.*

Weiter ist $(A_0 A_n) = 0$, also $A_0 = \lambda_0 A_n$ und da ausserdem die Gleichungen

$$(A_1 A_0) = 0 = \lambda_0 (A_1 A_n) = \lambda_0 (n-1) A_n$$

bestehen, *so verschwindet* λ_0 *und somit auch* A_0 *immer, wenn* n *grösser als* 1 *ist.*

Wir müssen jetzt die Fälle $n = 1, 2, 3$ einzeln behandeln.

1. *Fall.* $n = 1$.

Es ist $A_0 = \lambda_0 A_1$; führen wir eine geeignete Function von α als neues α ein, so können wir $A_1 f$ auf die Form $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ bringen und bekommen daher die unendliche Gruppe

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + (\lambda_0 \varphi + \varphi') \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Führen wir hier noch $\alpha - \lambda_0 x$ als neues α ein, so erscheint die Gruppe in der Gestalt:

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \varphi' \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

2. *Fall.* $n = 2$.

Wie wir oben sahen, ist:

$$A_0 = 0, \quad (A_1 A_2) = A_2.$$

Indem wir daher $A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$ wählen, ergiebt sich:

$$A_1 f = - (\alpha + \text{const.}) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

oder wenn $\alpha +$ const. als neues α eingeführt wird:

$$A_2 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad A_1 f = - \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Die betreffende unendliche Gruppe ist daher:

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + (\varphi'' - \alpha \varphi') \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

3. *Fall.* $n = 3$.

Die oben gefundenen Relationen zwischen $A_0 f \ldots A_3 f$ sind:

$$A_0 = A_2 = 0, \quad (A_1 A_3) = 2 A_3.$$

Setzen wir $A_3 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$, so folgt

$$A_1 f = - (2\alpha + \text{const.}) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

und indem wir die Constante wie beim zweiten Falle wegschaffen:

$$A_3 f = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad A_1 f = - 2\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

Also haben wir die folgende unendliche Gruppe:

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + (\varphi''' - 2\alpha \varphi') \frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

7. In der vorangehenden Nummer haben wir gesehen, dass *jede unendliche Gruppe von der Form*

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

sich durch geeignete Wahl von α auf eine der vier Formen:

$$(4)\qquad \begin{cases} \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}, & \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}+\varphi'\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \\ \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}+(\varphi''-\alpha\varphi')\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}, & \varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}+(\varphi'''-2\alpha\varphi')\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} \end{cases}$$

zurückführen lässt.

Nach dem in § 1 Nr. 2 bewiesenen Satze 1. stellt nun die Gleichung $U(\alpha, \xi) - \alpha'\xi = 0$, wenn darin für α eine bestimmte Function von x gesetzt wird, immer die Definitionsgleichung einer Gruppe dar. Wenden wir diess auf die vorliegenden vier Gruppen (4) an, so bemerken wir zunächst, dass die Gruppe $\varphi\dfrac{\partial f}{\partial x}$ nur liefert $\alpha'\xi = 0$ also $\xi = 0$. Dagegen erhalten wir in den übrigen drei Fällen wirklich Gruppen, nämlich die folgenden:

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi' - \alpha'\xi = 0 \\ \xi'' - \alpha\xi' - \alpha'\xi = 0 \\ \xi''' - 2\alpha\xi' - \alpha'\xi = 0. \end{cases}$$

Auf eine dieser drei Formen lässt sich also jede Definitionsgleichung $U(\alpha, \xi) - \alpha'\xi = 0$ *bringen, welche zu einer unendlichen Gruppe*

$$\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + U(\alpha, \varphi)\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

gehört.

Die drei Gruppentypen (5) sind, wie aus Lie's Untersuchungen bekannt ist, die *einzigen* der einfachen Mannigfaltigkeit.

Die Gleichung $\xi' - \alpha'\xi = 0$ definirt die eingliedrigen Gruppen, welche mit der Gruppe $\dfrac{df}{dx}$ oder $x_1 = x + a$ ähnlich sind. Die Gleichung $\xi'' - \alpha\xi' - \alpha'\xi = 0$ definirt die Gruppen, welche mit der Gruppe $\dfrac{df}{dx}$, $x\dfrac{df}{dx}$ oder $x_1 = ax + b$ ähnlich sind. Endlich die Gleichung $\xi''' - 2\alpha\xi' - \alpha'\xi = 0$ definirt solche Gruppen, welche mit der allgemeinen projectivischen Gruppe $\dfrac{df}{dx}$, $x\dfrac{df}{dx}$, $x^2\dfrac{df}{dx}$ ähnlich sind.

Unsere Methode liefert uns demnach sämmtliche Gruppen der einfachen Mannigfaltigkeit. A priori klar war diess allerdings keineswegs und es müsste eigentlich untersucht werden, warum wir alle Gruppen erhalten haben. (Vgl. darüber das im letzten Theile der Einleitung gesagte.)

8. *Untersuchen wir jetzt, ob es uns mit Benutzung des Satzes* 3, § 1 Nr. 4 *gelingt Integrale der Definitionsgleichungen* (5) *aufzustellen.*

Wir gehen die drei Fälle einzeln durch, stellen jedesmal die Differentialgleichung (15) des § 1 auf und suchen ihre Integrale.

1. *Fall.* Die Gleichung

$$\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \xi\varphi'\frac{\partial f}{\partial \xi} + \varphi'\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

zerfällt in die beiden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

Die einzige Lösung derselben ist $\xi e^{-\alpha}$, also ist $\xi e^{-\alpha} = \text{const.}$ das Integral der Differentialgleichung $\xi' - \alpha' \xi = 0$.

2. *Fall.* Die Gleichung

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \varphi' \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi \varphi'' \frac{\partial f}{\partial \xi'} + (\varphi'' - \alpha \varphi') \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

zerlegt sich wie folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \xi \frac{\partial f}{\partial \xi'} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Man erhält hieraus ein Integral der Gleichung $\xi'' - \alpha \xi' - \alpha' \xi = 0$, nämlich $\xi' - \alpha \xi = \text{const.}$

3. *Fall.*

$$\varphi \frac{\partial f}{\partial x} + \xi \varphi' \frac{\partial f}{\partial \xi} + \xi \varphi'' \frac{\partial f}{\partial \xi'} + (\xi \varphi''' + \xi' \varphi'' - \xi'' \varphi') \frac{\partial f}{\partial \xi''} + (\varphi''' - 2\alpha\varphi') \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

ergiebt:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \xi'' \frac{\partial f}{\partial \xi''} - 2\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

$$\xi \frac{\partial f}{\partial \xi'} + \xi' \frac{\partial f}{\partial \xi''} = 0, \quad \xi \frac{\partial f}{\partial \xi''} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Es findet sich ein Integral der Differentialgleichung $\xi''' - 2\alpha \xi' - \alpha' \xi = 0$ nämlich

$$\xi \xi'' - \frac{1}{2} \xi'^2 - \alpha \xi^2 = \text{const.}$$

Man verificirt in jedem einzelnen Falle leicht, dass man wirklich ein Integral der betreffenden Differentialgleichung vor sich hat.

Hier wird der geeignete Ort sein, noch etwas näher auf die Integrationstheorie der Gleichung $\xi''' - 2\alpha \xi' - \alpha' \xi = 0$ *einzugehen.* Ueber die beiden andern Definitionsgleichungen brauchen wir dagegen nichts weiter hinzuzufügen, da aus dem Gesagten schon hervorgeht, dass sie beide durch Quadraturen erledigt werden können.

Wir denken uns also die Differentialgleichung

$$\xi''' - 2\alpha \xi' - \alpha' \xi = 0 \tag{6}$$

vorgelegt und für α irgend eine gegebene Function von x eingesetzt. Ein Integral der Gleichung (6) kennen wir zwar schon, nämlich

$$\xi \xi'' - \frac{1}{2} \xi'^2 - \alpha \xi^2 = \text{const.},$$

allein dasselbe bringt uns zunächst weiter keinen Vortheil.

Die Gruppe, welche durch (6) definirt wird, ist einfach, denn sie ist gleichzusammengesetzt und zugleich ähnlich mit der allgemeinen

projectivischen Gruppe $\frac{df}{dx}$, $x\frac{df}{dx}$, $x^2\frac{df}{dx}$ der einfachen Mannigfaltigkeit. Die gesuchte Gruppe enthält daher ∞^1 zweigliedrige Untergruppen, welche nach dem früheren durch Differentialgleichungen von der Form

$$\xi'' - \beta(x)\xi' - \beta'(x)\xi = 0$$

definirt werden.

Wir wollen die allgemeine Definitionsgleichung dieser ∞^1 Untergruppen bestimmen. Zu dem Ende differentiiren wir die Gleichung $\xi'' - \beta\xi' - \beta'\xi = 0$ nach x:

$$\xi''' - \beta\xi'' - 2\beta'\xi' - \beta''\xi = 0$$

und eliminiren sodann ξ'':

$$\xi''' - (\beta^2 + 2\beta')\xi' - (\beta\beta' + \beta'')\xi = 0.$$

Diese Gleichung muss mit (6) übereinstimmen, es muss also β der Differentialgleichung

$$\beta' + \tfrac{1}{2}\beta^2 = \alpha \tag{7}$$

genügen.

Ist nun $\beta = \beta(x, \alpha)$ die allgemeine Lösung dieser Gleichung, so definirt $\xi'' - \beta(x, a)\xi' - \beta'(x)\xi = 0$ die erwähnten ∞^1 Untergruppen und ist zugleich offenbar ein Integral der Gleichung (6).

Jetzt könnten wir mit Hülfe des Integrals $\xi\xi'' - \frac{1}{2}\xi'^2 - \alpha\xi^2 = \text{const.}$ noch ein weiteres Integral finden; es ist aber bequemer und kommt übrigens auf dasselbe hinaus, wenn wir gleich von dem früher gefundenen Integrale der Gleichung $\xi'' - \beta\xi' - \beta'\xi = 0$ Gebrauch machen. Auf diese Weise erhalten wir ein Integral von (6) mit zwei willkürlichen Constanten:

$$\xi' - \beta(x, a)\xi = \text{const.}$$

Die Integration dieser Gleichung erfordert anscheinend Quadratur, kann aber ohne Quadratur geleistet werden. Diess zeigen uns die folgenden Betrachtungen, welche wir aber nur kurz andeuten wollen, weil dieselben oder wenigstens ganz ähnliche schon mehrfach von Lie angewendet worden sind.

In der dreigliedrigen Gruppe $\frac{df}{dx}$, $x\frac{df}{dx}$, $x^2\frac{df}{dx}$ und ebenso in jeder mit ihr gleichzusammengesetzten haben zwei zweigliedrige Untergruppen stets eine eingliedrige gemein und, wie sich zeigen lässt, ist auch jede eingliedrige Untergruppe in zwei zweigliedrigen enthalten. Diese Bemerkung können wir hier verwerthen.

Denken wir uns a und b in den beiden Gleichungen

$$\xi' - \beta(x, a)\xi = \text{const.}, \quad \xi' - \beta(x, b)\xi = \text{const.}$$

als feste aber doch willkürlich gewählte Constanten, so definiren diese beiden Gleichungen zusammengenommen die infinitisemale Transformation, welche zwei bestimmten zweigliedrigen Untergruppen der gesuchten Gruppe gemein ist.

Wir bekommen daher für diese infinitesimale Transformation den Ausdruck:

$$\xi = \frac{\text{const.}}{\beta(x, a) - \beta(x, b)} . \tag{8}$$

Lassen wir aber hierin a und b variiren, so erhalten wir alle infinitesimalen Transformationen, welche zwei zweigliedrigen Untergruppen gemeinsam sind, also nach dem Obigen alle infinitesimalen Transformationen der gesuchten Gruppe.

Die Gleichung (8) stellt mithin die allgemeine Lösung der Gleichung (6) dar. Diess kann man übrigens auch direct verificiren, indem man (8) differentiirt und vermittels der Gleichung (7), welcher $\beta(x, a)$ und $\beta(x, b)$ beide genügen, die Functionen β und die Constante c eliminirt.

Die Integration der Differentialgleichung 3. O. (6) *ist demnach unmittelbar durchführbar, wenn die Differentialgleichung 1. O.* (7) *vollständig integrirt ist.*

9. Es wurde schon oben einmal (vgl. Nr. 7) beiläufig erwähnt, dass *jede der drei Definitionsgleichungen*

$$\xi' - \alpha'\xi = 0, \quad \xi'' - \alpha\xi' - \alpha'\xi = 0, \quad \xi''' - 2\alpha\xi' - \alpha'\xi = 0 \tag{9}$$

eine unendliche Schaar von Gruppen definirt, welche unter einander ähnlich sind. Doch wurde diess damals geschlossen, indem wir uns auf Lie's Bestimmung der Gruppen in der einfachen Mannigfaltigkeit beriefen. Jetzt wollen wir auf diesen Punkt etwas näher eingehen.

Sollen alle Gruppen, welche durch die Differentialgleichung

$$U(\alpha, \xi) - \alpha'\xi = 0 \tag{10}$$

definirt werden, unter einander ähnlich sein, so ist es zunächst nothwendig, dass jede Gruppe dieser Schaar bei Einführung einer neuen Variabeln $x_1 = F(x)$ an Stelle von x wieder in eine Gruppe der Schaar übergeht; ausserdem muss aber noch jede Gruppe der Schaar in jede andere übergeführt werden können.

Machen wir in (10) die Substitution $x_1 = F(x)$ und entsprechend $\xi_1 = \xi F'(x)$, so erhalten wir eine Gleichung von der Form:

$$\sum_0^n {}_i B_i(\alpha, F, F' \ldots)\xi_1^{(i)} - \frac{\alpha'}{F'}\xi_1 = 0, \tag{11}$$

wo $\xi_1^{(i)}$ für $\frac{d^i \xi_1}{dx_1^i}$ geschrieben ist. Soll nun jede Gruppe wieder in eine

Gruppe der Schaar übergehen, so muss diese letzte Gleichung, wenn man ihre Coefficienten durch die neue Variable x_1 ausdrückt, die Form

$$U(\alpha_1, \xi_1) - \alpha_1' \xi_1 = 0$$

erhalten können, unter α_1 eine Function von x_1 verstanden. Diese Forderung giebt eine oder mehrere Gleichungen zur Bestimmung von α_1 und α_1' als Functionen von $\alpha, \alpha', F, F' \ldots$.

Sehen wir zu, wie sich die Sache bei den drei verschiedenen Definitionsgleichungen (9) *gestaltet.*

Wir finden zunächst:

$$\xi = \frac{\xi_1}{F'}, \qquad \xi' = \xi_1' - \xi_1 \frac{F''}{F'^2}$$

$$\xi'' = \xi_1'' F' - \xi_1' \frac{F''}{F'} - \xi_1 \frac{F'F''' - 2F''^2}{F'^3}$$

$$\xi''' = \xi_1''' F'^2 - \xi_1' \frac{2F'F''' - 3F''^2}{F'^2} - \xi_1 \frac{d}{dx} \frac{F'F''' - 2F''^2}{F'^3}.$$

Bilden wir unter Zugrundelegung dieser Formeln zu jeder der drei Differentialgleichungen (9) die entsprechende Gleichung (11) und verlangen, dass die drei auf diese Weise gefundenen Gleichungen bezüglich mit

$$\xi_1' - \alpha_1' \xi_1 = 0, \quad \xi_1'' - \alpha_1 \xi_1' - \alpha_1' \xi_1 = 0, \quad \xi_1''' - 2\alpha_1 \xi_1' - \alpha_1' \xi_1 = 0$$

identisch werden, so erhalten wir Folgendes:

1. *Fall.*

$$\alpha_1' = \frac{\alpha'}{F'} + \frac{F'''}{F'^2}$$

also, da $\alpha_1' F' = \frac{d\alpha_1}{dx}$ ist:

(12) $$x_1 = F(x), \quad \xi_1 = \xi F'(x), \quad \alpha_1 = \alpha + lF' + \text{const.}$$

In den beiden übrigen Fällen ergeben sich je zwei Gleichungen, von denen wir aber jedesmal nur die eine aufzustellen brauchen, weil die andere aus ihr durch Differentiation hervorgeht. Es wird im 2. *Falle*:

(13) $$x_1 = F(x), \quad \xi_1 = \xi F'(x), \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{F'} + \frac{F''}{F'^2}$$

und im 3. *Falle*:

(14) $$x_1 = F(x), \quad \xi_1 = \xi F'(x), \quad \alpha_1 = \frac{\alpha}{F'^2} + \frac{F'F''' - \frac{3}{2}F''^2}{F'^4}.$$

Verstehen wir hier unter $F(x)$ eine willkürliche Function von x, so haben wir offenbar in jedem dieser drei Fälle eine unendliche Gruppe von endlichen Transformationen, welche die betreffende Differentialgleichung (9) invariant lassen. Die einzelnen Gruppen, welche eine

solche Differentialgleichung für die verschiedenen Werthe der Functionen $\alpha(x)$ definirt, werden dabei unter einander vertauscht.

In jedem der drei Fälle können wir ferner für α eine beliebige Function $\alpha(x)$ und für α_1 eine beliebige Function $\alpha_1(x_1)$ setzen und erhalten dann jedesmal eine Differentialgleichung zur Bestimmung von $F(x)$. Daraus schliessen wir, dass z. B. vermöge der unendlichen Gruppe (13) jede beliebige Gruppe $\xi'' - \alpha(x)\xi' - \alpha'(x)\xi = 0$ in jede beliebige andere Gruppe $\xi_1'' - \alpha_1(x_1)\xi_1' - \alpha_1'(x_1)\xi_1 = 0$ übergeführt werden kann und ebenso in den beiden übrigen Fällen. Diess aber war eben zu beweisen.

Substituiren wir in (13) für α eine *bestimmte* Function $\alpha(x)$ und für α_1 dieselbe Function von x_1 nämlich $\alpha(x_1)$, so bekommen wir für F die Differentialgleichung

$$\alpha(x_1) = \frac{\alpha(x)}{F'} + \frac{F''}{F'^2}. \tag{15}$$

Dieselbe definirt alle Transformationen $x_1 = F(x)$, welche die Gleichung $\xi'' - \alpha(x)\xi' - \alpha'(x)\xi = 0$ in $\xi_1'' - \alpha(x_1)\xi_1' - \alpha'(x_1)\xi_1 = 0$ verwandeln. Es ist klar, dass alle Transformationen $x_1 = F(x)$ von dieser Beschaffenheit eine endliche Gruppe bilden. Um die infinitesimalen Transformationen derselben zu finden, setzen wir $x_1 = F(x) = x + \xi\delta t$, dann wird

$$\alpha(x_1) = \alpha(x) + \alpha'(x)\xi\delta t$$

und aus (15) ergiebt sich für ξ die Differentialgleichung:

$$\xi'' - \alpha(x)\xi' - \alpha'(x)\xi = 0. \tag{16}$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x_1}{dx^2} + \alpha(x)\frac{dx_1}{dx} - \alpha(x_1)\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 = 0$$

definirt also die endlichen Gleichungen $x_1 = F(x)$ derjenigen Gruppe, deren infinitesimale Transformationen durch die Gleichung (16) definirt werden.

Ebenso erkennen wir, dass die Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{dx}\frac{d^3x_1}{dx^3} - \frac{3}{2}\left(\frac{d^2x_1}{dx^2}\right)^2 + \alpha(x)\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^2 - \alpha(x_1)\left(\frac{dx_1}{dx}\right)^4 = 0$$

die endlichen Gleichungen der Gruppe

$$\xi''' - 2\alpha(x)\xi' - \alpha'(x)\xi = 0 \tag{17}$$

definirt.

Auf das Verhältniss der Differentialgleichung $\xi' - \alpha'(x)\xi = 0$ zu der unendlichen Gruppe (12) wollen wir nicht eingehen; um nicht zu weitläufig zu werden. Dagegen wollen wir über die beiden Gruppen (13) und (14) noch eine kurze Bemerkung machen.

Die Gleichungen dieser Gruppen ergaben sich oben ohne Integration. Die Kenntniss dieser Gleichungen gestattet uns aber die in Nr. 8 aufgestellten Integrale der beiden Differentialgleichungen (16) und (17) ohne Integration zu finden.

Wir werden den Beweis nur andeuten. Das Integral der Gleichung (17) zum Beispiel hatte die Form

$$\xi\xi'' - \frac{1}{2}\xi'^2 - \alpha\xi^2 = \text{const.},$$

wo die Function links die unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen

$$\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \xi\varphi'\frac{\partial f}{\partial \xi} + (\varphi''' - 2\alpha\varphi')\frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

gestattet. Diese Function muss nun auch die unendliche Gruppe von endlichen Transformationen (14) gestatten und man muss daher aus den Gleichungen (14) mit Hinzunahme der Ausdrücke für $\xi_1'\xi_1''$ eine Gleichung von der Form

$$\xi_1\xi_1'' - \frac{1}{2}\xi_1'^2 - \alpha_1\xi_1^2 = \xi\xi'' - \frac{1}{2}\xi'^2 - \alpha\xi^2$$

erhalten, wenn man φ und seine Differentialquotienten eliminirt. Diess ist auch wirklich der Fall.

Ebenso erhält man aus (13) leicht:

$$\xi_1' - \alpha_1\xi_1 = \xi' - \alpha\xi.$$

Damit sind die beiden Integrale in der That ohne Integration gefunden.

§ 3.

Allgemeine Entwickelungen für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

10. Wir wenden uns dazu die Betrachtungen der Nummern 2 und 3 des § 1 für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit durchzuführen. Doch werden wir uns jetzt etwas kürzer fassen können.

In den Variabeln $x_1 \ldots x_n$, $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ möge

$$\sum_1^n \varphi_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m \Omega_\varkappa\left(\alpha_1 \cdots \alpha_m,\ \varphi_1 \cdots \varphi_n,\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_1^2} \cdots\right)\frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

eine unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen darstellen. Unter den φ_i verstehen wir dabei willkürliche Functionen von $x_1 \ldots x_n$; die $\Omega_\varkappa$ enthalten ausser $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ noch die φ_i nebst ihren Differentialquotienten bis zu einer gewissen Ordnung. Ausserdem setzen wir noch voraus, dass die Functionen $\Omega_\varkappa$ keine willkürlichen Constanten enthalten und daher vollständig bestimmt sind, wenn die φ_i gegeben sind;

endlich möge noch $\Omega_1 = \cdots = \Omega_m = 0$ werden, wenn alle φ_i verschwinden.

Nehmen wir eine zweite infinitesimale Transformation der obigen Gruppe hinzu, etwa:

$$\sum_1^n{}_i \psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa \Omega_\varkappa \left(\alpha_1 \cdots \alpha_m,\ \psi_1 \cdots \psi_n,\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \cdots\right) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa},$$

so muss auch

$$\sum_1^n{}_i (a\varphi_i + b\psi_i) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa \left(a\Omega_\varkappa(\alpha, \varphi) + b\Omega_\varkappa(\alpha, \psi)\right) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

der Gruppe angehören; die Coefficienten der $\frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$ müssen daher unter den gemachten Voraussetzungen die Form $\Omega_\varkappa(\alpha, a\varphi + b\psi)$ erhalten können. Daraus schliessen wir, dass die Functionen $\Omega_\varkappa$ in den φ_i und deren Differentialquotienten linear und homogen sind.

Wie früher setzen wir zur Abkürzung

$$\Omega_\varkappa \left(\alpha_1 \ldots \alpha_m,\ \varphi_1 \ldots \varphi_n,\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \cdots\right) = U_\varkappa(\alpha, \varphi).$$

Unter den infinitesimalen Transformationen

$$(1) \qquad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

suchen wir nun diejenigen, welche das Gleichungensystem

$$(2) \qquad \alpha_1 - \alpha_1(x_1 \ldots x_n) = 0 \ldots \alpha_m - \alpha_m(x_1 \ldots x_n) = 0$$

invariant lassen. Der Inbegriff aller dieser Transformationen — wenn es überhaupt solche giebt — bildet dann, wie wir wissen, eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen.

Soll das Gleichungensystem (2) die infinitesimalen Transformationen (1) gestatten, so müssen die Ausdrücke

$$U_\varkappa(\alpha, \varphi) - \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha_\varkappa(x_1 \ldots x_n)$$

bei der Substitution $\alpha_\varkappa = \alpha_\varkappa(x_1 \ldots x_n)$ verschwinden d. h. $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ müssen die m Differentialgleichungen

$$(3) \qquad U_\varkappa(\alpha, \varphi) - \sum_1^n{}_i \alpha_{\varkappa i} \varphi_i = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

befriedigen. In denselben ist für $\alpha_\varkappa$ die Function $\alpha_\varkappa(x_1 \ldots x_n)$ ein-

zusetzen; $\alpha_{\varkappa i}$ ist zur Abkürzung für $\frac{\partial \alpha_\varkappa}{\partial x_i}$ geschrieben. Nehmen wir einstweilen an, dass die Gleichungen (3) wirklich Lösungen besitzen. Setzen wir dann in (1) an Stelle von $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ die allgemeinsten Lösungen von (3) ein, so erhalten wir eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$, $\alpha_1 \ldots \alpha_m$.

Die Gleichungen (3) definiren aber auch eine Gruppe in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ allein und diese letztere ist es, welche uns hier interessirt. Denn haben wir zwei Lösungensysteme $\varphi_1 \ldots \varphi_n$, $\psi_1 \ldots \psi_n$ dieser Gleichungen, so ist offenbar auch

$$\sum_1^n{}_i \left(\varphi_i \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} - \psi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) \qquad (j = 1 \ldots n)$$

ein Lösungensystem.

Das System der Definitionsgleichungen

$$(3') \qquad U_\varkappa(\alpha, \xi) - \sum_1^n{}_i \alpha_{\varkappa i} \xi_i = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

gestattet nun die unendliche Gruppe der infinitesimalen Transformationen

$$(4) \qquad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_j \xi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa},$$

welche ausführlich geschrieben lauten:

$$(4') \qquad x_i' = x_i + \varphi_i(x_1 \ldots x_n)\delta t, \quad \xi_i' = \xi_i + \sum_1^n{}_j \xi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \delta t,$$

$$\alpha_\varkappa' = \alpha_\varkappa + U_\varkappa(\alpha, \varphi)\delta t.$$

Um diess zu beweisen, erinnern wir zunächst daran, dass die Gleichungen (3') bei der Substitution $\alpha_\varkappa = \alpha_\varkappa(x_1 \ldots x_n)$ diejenigen unter den infinitesimalen Transformationen (1) definiren, welche das Gleichungensystem $\alpha_\varkappa - \alpha_\varkappa(x_1 \ldots x_n) = 0$ invariant lassen. Geht nun dieses Gleichungensystem bei Ausführung der Transformationen (4') über in $\alpha_\varkappa' - \alpha_\varkappa'(x_1' \ldots x_n') = 0$, so müssen die durch (3') definirten Transformationen sich in diejenigen Transformationen (1) verwandeln, welche das System der Gleichungen $\alpha_\varkappa' - \alpha_\varkappa'(x_1' \ldots x_n') = 0$ invariant lassen. Mit andern Worten die Gleichungen (3') nehmen vermöge der Transformationen (4') die Form an:

$$U_\varkappa(\alpha', \xi') - \sum_1^n{}_i \alpha'_{\varkappa i} \xi_i' = 0 \quad (\varkappa = 1 \ldots m).$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die bisherigen Resultate zusammenfassend können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 4. *Bestimmt der Ausdruck*

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

eine unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen und bedeuten dabei die $U_\varkappa$ Functionen von $\alpha_1 \ldots \alpha_m$, welche ausserdem linear und homogen von $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ und ihren Differentialquotienten abhängen; ist es ferner möglich für $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ solche Functionen von $x_1 \ldots x_n$ zu wählen, dass die m Differentialgleichungen für $\xi_1 \ldots \xi_n$:

$$U_\varkappa(\alpha, \xi) - \sum_1^n{}_\nu \alpha_{\varkappa\nu} \xi_\nu = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

ein integrables System bilden, so definirt dieses System eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$. Ueberdiess gestattet das betreffende System von Differentialgleichungen die unendliche Gruppe von infinitesimalen Transformationen:

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_j \xi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}.$$

11. Während wir in der vorigen Nummer dem von Lie gegebenen Gedankengang folgten, wollen wir jetzt noch kurz bei meinem ursprünglichen Beweise des Satzes 4 verweilen.

Dass die Gleichungen (3') eine Gruppe von infinitesimalen Transformationen definiren, bewies ich folgendermassen.

Die beiden infinitesimalen Transformationen

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa},$$

$$\sum_1^n{}_i \psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \psi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

werden mit einander combinirt. Die resultirende Transformation muss dann wieder der unendlichen Gruppe (1) angehören und daher die Form besitzen:

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_j \left(\varphi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} - \psi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa \left(\alpha, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa};$$

dabei wird unter $U_\varkappa \left(\alpha, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ der Ausdruck verstanden,

welcher aus $U_\varkappa(\alpha, \varphi)$ durch die Substitution von

$$\sum_1^n{}_j \left(\varphi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} - \psi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right)$$

an Stelle von φ_i hervorgeht. Ferner möge noch $\frac{\partial}{\partial x_i} U_\varkappa(\alpha, \varphi)$ den partiellen Differentialquotienten von $U_\varkappa(\alpha, \varphi)$ nach x_i bedeuten, soweit x_i in den φ_j und den $\alpha_\varkappa$ vorkommt, dagegen $\frac{\partial'}{\partial x_i} U_\varkappa(\alpha, \varphi)$ den Differentialquotienten nach x_i, soweit dasselbe in den φ_j vorkommt, so dass also die Gleichung besteht:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} U_\varkappa(\alpha, \varphi) = \sum_1^m{}_\mu \alpha_{\mu i} \frac{\partial}{\partial \alpha_\mu} U_\varkappa(\alpha, \varphi) + \frac{\partial'}{\partial x_i} U_\varkappa(\alpha, \varphi).$$

Nach diesen Festsetzungen können wir den Ausdruck berechnen, welcher sich bei der besprochenen Combination für $U_\varkappa\left(\alpha, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ ergiebt. Es wird identisch:

$$U_\varkappa\left(\alpha, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \equiv \sum_1^n{}_i \left(\varphi_i \frac{\partial'}{\partial x_i} U_\varkappa(\alpha, \psi) - \psi_i \frac{\partial'}{\partial x_i} U_\varkappa(\alpha, \varphi)\right) +$$

$$+ \sum_1^m{}_j \left\{U_j(\alpha, \varphi) \frac{\partial}{\partial \alpha_j} U_\varkappa(\alpha, \psi) - U_j(\alpha, \psi) \frac{\partial}{\partial \alpha_j} U_\varkappa(\alpha, \varphi)\right\}.$$

In etwas anderer Gestalt lautet diese Gleichung:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} U_\varkappa\left(\alpha, \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \equiv \sum_1^n{}_i \left(\varphi_i \frac{\partial U_\varkappa(\alpha, \psi)}{\partial x_i} - \psi_i \frac{\partial U_\varkappa(\alpha, \varphi)}{\partial x_i}\right) + \\ + \sum_1^m{}_j \left\{ \frac{\partial U_\varkappa(\alpha, \psi)}{\partial \alpha_j} \left(U_j(\alpha, \varphi) - \sum_1^n{}_\nu \alpha_{j\nu} \varphi_\nu\right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial U_\varkappa(\alpha, \varphi)}{\partial \alpha_j} \left(U_j(\alpha, \psi) - \sum_1^n{}_\nu \alpha_{j\nu} \psi_\nu\right)\right\}. \end{aligned} \right.$$

Subtrahiren wir endlich hiervon die Identität

$$\sum_1^n{}_\nu \alpha_{\varkappa\nu} \sum_1^n{}_\lambda \left(\varphi_\lambda \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x_\lambda} - \psi_\lambda \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\lambda}\right)$$

$$\equiv \sum_1^n{}_i \left\{\varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_1^n{}_\nu \alpha_{\varkappa\nu} \psi_\nu\right) - \psi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_1^n{}_\nu \alpha_{\varkappa\nu} \varphi_\nu\right)\right\},$$

so kommt die identische Gleichung:

$$(5')\quad \left\{\begin{aligned} & U_\varkappa\Big(\alpha, \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big)-\sum_1^n{}_\nu\,\alpha_{\varkappa\nu}\sum_1^n{}_\lambda\Big(\varphi_\lambda\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_\lambda}-\psi_\lambda\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\lambda}\Big)\\ &\quad\equiv\sum_1^n{}_i\Big\{\varphi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(U_\varkappa(\alpha,\psi)-\sum_1^n{}_\nu\,\alpha_{\varkappa\nu}\psi_\nu\Big)-\\ &\quad-\psi_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(U_\varkappa(\alpha,\varphi)-\sum_1^n{}_\nu\,\alpha_{\varkappa\nu}\varphi_\nu\Big)\Big\}+\\ &\quad+\sum_1^m{}_j\Big\{\frac{\partial}{\partial\alpha_j}U_\varkappa(\alpha,\psi)\Big(U_\varkappa(\alpha,\varphi)-\sum_1^n{}_\nu\,\alpha_{\varkappa\nu}\varphi_\nu\Big)-\\ &\quad-\frac{\partial}{\partial\alpha_j}U_\varkappa(\alpha,\varphi)\Big(U_\varkappa(\alpha,\psi)-\sum_1^n{}_\nu\,\alpha_{\varkappa\nu}\psi_\nu\Big)\Big\}. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichung (5') zeigt es klar, dass das System von Differentialgleichungen (3') ein System von Definitionsgleichungen darstellt. Ein weiteres Eingehen hierauf dürfte überflüssig sein.

Noch bleibt zu zeigen, dass das System (3') die infinitesimalen Transformationen (4) gestattet. Um diess zu beweisen, ertheilen wir den Variabeln x_i, ξ_i und $\alpha_\varkappa$ die Incremente:

$$\delta x_i=\varphi_i\delta t,\qquad \delta\xi_i=\sum_1^n{}_j\,\xi_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\,\delta t,\qquad \delta\alpha_\varkappa=U_\varkappa(\alpha,\varphi)\delta t$$

und haben nun das entsprechende Increment von $U_\varkappa(\alpha,\xi)-\Sigma\alpha_{\varkappa i}\xi_i$ zu berechnen.

Setzen wir

$$\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}\,\xi_i=\xi_i^{(\nu_1\cdots\nu_n)},$$

so gilt die allgemeine Formel:

$$\frac{\delta\xi_i^{(\nu_1\cdots\nu_n)}}{\delta t}=\sum_1^n{}_j\frac{\partial\xi_i^{(\nu_1\cdots\nu_n)}}{\partial x_j}\varphi_j+\sum_1^n{}_j\frac{\partial^{\nu_1+\cdots+\nu_n}}{\partial x_1^{\nu_1}\ldots\partial x_n^{\nu_n}}\Big(\xi_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}-\varphi_j\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}\Big),$$

bei deren sehr einfachem Beweise wir uns nicht aufhalten wollen. Aus der Gleichung

$$d\alpha_\varkappa-\sum_1^n{}_\nu\,\alpha_{\varkappa\nu}\,dx_\nu=0$$

ergiebt sich ausserdem für das Increment von $\alpha_{\varkappa\nu}$ der Ausdruck:

$$\frac{\delta\alpha_{\varkappa\nu}}{\delta t}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}U_\varkappa(\alpha,\varphi)-\sum_1^n{}_\pi\,\alpha_{\varkappa\pi}\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}.$$

Nunmehr können wir das gewünschte Increment berechnen. Da $U_\varkappa(\alpha, \xi)$ in den ξ und deren Differentialquotienten linear und homogen ist, erhalten wir:

$$\frac{\delta}{\delta t}\Big(U_\varkappa(\alpha,\xi)-\sum_1^n \alpha_{\varkappa\nu}\xi_\nu\Big)=\sum_1^n \varphi_\pi \frac{\partial}{\partial x_\pi} U_\varkappa(\alpha,\xi)+U_\varkappa\Big(\alpha,\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\varphi\frac{\partial\xi}{\partial x}\Big)+$$

$$+\sum_1^m U_j(\alpha,\varphi)\frac{\partial}{\partial\alpha_j}U_\varkappa(\alpha,\xi)-\sum_1^n \alpha_{\varkappa\nu}\sum_1^n \xi_\pi\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\pi}-$$

$$-\sum_1^n \xi_\nu\Big(\frac{\partial}{\partial x_\nu}U_\varkappa(\alpha,\varphi)-\sum_1^n \alpha_{\varkappa\pi}\frac{\partial\varphi_\pi}{\partial x_\nu}\Big).$$

Hieraus aber ergiebt sich durch Benutzung der Identität (5) die einfache Formel:

$$(6)\qquad \frac{\delta}{\delta t}\Big(U_\varkappa(\alpha,\xi)-\sum_1^n \alpha_{\varkappa\nu}\xi_\nu\Big)=\sum_1^m \frac{\partial}{\partial\alpha_j}U_\varkappa(\alpha,\varphi)\Big\{U_j(\alpha,\xi)-\sum_1^n \alpha_{j\nu}\xi_\nu\Big\}.$$

Diese Gleichung sagt eben aus, dass das System der Gleichungen (3′) die infinitesimalen Transformationen (4) gestattet.

12. Ein System, welches aus Differentialgleichungen s^{ter} und niedrigerer Ordnung besteht, ist *unbeschränkt* integrabel, wenn es bei ein- und mehrmaliger Differentiation und nachheriger Combination der erhaltenen Gleichungen keine neue Differentialgleichung von s^{ter} oder geringerer Ordnung ergiebt.

Ist ein vorgelegtes System von Differentialgleichungen nicht unbeschränkt integrabel, so müssen vermittels der angedeuteten Operationen neue Differentialgleichungen hinzugefügt werden, bis es schliesslich zu einem unbeschränkt integrablen Systeme vervollständigt ist; erst wenn diess geschehen, kann man die eigentliche Untersuchung des Systems beginnen. Wir wollen uns deshalb die Definitionsgleichungen einer Gruppe immer in der Gestalt eines unbeschränkt integrablen Systems vorgelegt denken.

Im Allgemeinen wird natürlich das System

$$(7)\qquad U_\varkappa(\alpha,\xi)-\sum_1^n \alpha_{\varkappa\nu}\xi_\nu=0\qquad(\varkappa=1\ldots m),$$

welches etwa Differentialquotienten von den ξ bis zur s^{ten} Ordnung enthalten möge, nicht unbeschränkt integrabel sein, so lange unter $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ vollkommen willkürliche Functionen von $x_1 \ldots x_n$ verstanden werden. Durch Differentiation und Combination ergeben sich vielmehr in den meisten Fällen neue Gleichungen s^{ter} und niedrigerer Ordnung. Wenn wir aber verlangen, dass unser System (7) unbeschränkt integrabel

ist, müssen diese neuen Gleichungen eine Folge des Systems (7) werden; sie müssen somit identisch bestehen, wenn vermittels der Gleichungen (7) irgend m von den Grössen ξ_i, $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} \cdots$ eliminirt werden. In den Gleichungen, welche wir nach Ausführung dieser Elimination erhalten, müssen daher die Coefficienten aller noch vorkommenden ξ_i, $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} \cdots$ verschwinden.

Diess giebt eine Anzahl Relationen zwischen den $\alpha_\varkappa$ und ihren Differentialquotienten:

$$(8) \qquad \chi_\varkappa(\alpha_1 \ldots \alpha_m,\ \alpha_{11},\ \alpha_{12} \ldots \alpha_{111} \ldots) = 0 \quad (\varkappa = 1,2 \ldots).$$

Solcher Relationen denken wir uns gerade so viele aufgestellt, dass sie ein unbeschränkt integrables System bilden, vermöge dessen das System (7) unbeschränkt integrabel ist. Vorausgesetzt wird dabei freilich, dass diess überhaupt möglich ist.

Die Differentialgleichungen (8) definiren alle Functionen $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ der Variabeln $x_1 \ldots x_n$, welche in (7) eingesetzt ein unbeschränkt integrables System ergeben; die Gleichungen (8) sind daher die Integrabilitätsbedingungen des Systems (7).

Es liegt äusserst nahe zu vermuthen, dass die Integrabilitätsbedingungen (8) bei den infinitesimalen Transformationen

$$(9) \qquad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

invariant bleiben, ebenso wie das System (7) bei den infinitesimalen Transformationen

$$(10) \qquad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial f}{\partial \xi_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}.$$

Wir werden einen Beweis dafür, dass diess wirklich der Fall ist, wenigstens andeuten.

Zunächst steht fest, dass ein unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen bei jeder Variabelnänderung in ein ebensolches System übergeht. Führen wir daher in (7) die neuen Variabeln

$$\bar{x}_i = \omega_i(x_1 \ldots x_n), \quad \bar{\xi}_i = \sum_1^n{}_\nu \xi_\nu \frac{\partial \omega_i}{\partial x_\nu} \quad (i = 1 \ldots n)$$

ein und bilden sodann aus den erhaltenen Differentialgleichungen in derselben Weise wie oben die Integrabilitätsbedingungen, so erhalten wir ein unbeschränkt integrables System von Differentialgleichungen für $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ und dieses System muss bei Wiedereinführung der

ursprünglichen Variabeln x_i mit den Integrabilitätsbedingungen (8) algebraisch äquivalent sein.

Wir führen jetzt in die Gleichungen (7) die neuen Variabeln

$$\bar{x}_i = x_i + \varphi_i\,\delta t, \quad \bar{\xi}_i = \xi_i + \sum_1^n{}_\nu\, \xi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \cdot \delta t \quad (i = 1 \ldots n)$$

ein. Definiren wir ausserdem noch die Functionen $\bar{\alpha}_\varkappa$ durch die Gleichungen

$$\bar{\alpha}_\varkappa = \alpha_\varkappa + U_\varkappa(\alpha, \varphi)\,\delta t \quad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

und erinnern uns daran, dass das System (7) die infinitesimalen Transformationen (10) gestattet, so erkennen wir, dass dieses System in den neuen Variabeln die Gestalt

$$U_\varkappa(\bar{\alpha}, \bar{\xi}) - \sum_1^n{}_\nu\, \bar{\alpha}_{\varkappa\nu} \bar{\xi}_\nu = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

annimmt.

Die neuen Integrabilitätsbedingungen werden daher:

$$\chi_\varkappa(\bar{\alpha}_1 \ldots \bar{\alpha}_m, \bar{\alpha}_{11} \ldots \bar{\alpha}_{111} \ldots) = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2 \ldots)$$

oder bei der Rückkehr zu den alten Variabeln:

$$\chi_\varkappa(\alpha_1 \cdots \alpha_m, \alpha_{11} \cdots) + \frac{\delta}{\delta t}\chi_\varkappa(\alpha_1 \cdots \alpha_m, \alpha_{11} \cdots)\,\delta t = 0.$$

Dieselben müssen nach dem Obigen mit dem Systeme der Gleichungen $\chi_\varkappa = 0$ algebraisch äquivalent sein, es müssen also alle Ausdrücke

$$\frac{\delta}{\delta t}\chi_\varkappa(\alpha_1 \ldots \alpha_m, \alpha_{11} \ldots)$$

vermöge $\chi_1 = 0$, $\chi_2 = 0 \ldots$ verschwinden. Das heisst aber nichts anderes, als dass die Integrabilitätsbedingungen (8) die infinitesimalen Transformationen (9) gestatten und das wurde eben behauptet.

Die Differentialgleichungen

$$(11) \qquad \begin{cases} U_\varkappa(\alpha, \xi) - \sum_1^n{}_\nu\, \alpha_{\varkappa\nu}\, \xi_\nu = 0 & (\varkappa = 1 \ldots m) \\ \chi_j(\alpha_1 \ldots \alpha_m, \alpha_{11} \ldots) = 0 & (j = 1, 2 \ldots) \end{cases}$$

bilden demnach zusammengenommen ein unbeschränkt integrables System, welches die unendliche Gruppe (10) *gestattet. Dieses System definirt eine unendliche Schaar von Gruppen*, denn jedes System von Functionen $\alpha_\varkappa$, welches die Gleichungen $\chi_j = 0$ befriedigt, ergiebt, wie wir wissen, in (11) eingesetzt die Definitionsgleichungen einer Gruppe von infinitesimalen Transformationen.

Interpretiren wir die Gleichungen (11) im Raume der Variabeln

$x_i, \xi_i, \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} \cdots, \alpha_\varkappa, \alpha_{\varkappa\nu} \cdots$, so erhalten wir eine Mannigfaltigkeit, welche bei den infinitesimalen Transformationen (10) invariant bleibt, vorausgesetzt, dass dieselben durch Mitnahme der Differentialquotienten $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} \cdots, \alpha_{\varkappa\nu} \cdots$ erweitert worden sind. Die Punkte der betreffenden Mannigfaltigkeit werden dagegen unter einander vertauscht und es kann dabei vorkommen, dass sich diese Punkte in Schaaren von unendlich vielen einzeln invarianten Mannigfaltigkeiten anordnen.

Analytisch ausgesprochen heisst diess: es ist denkbar, dass man zu den Differentialgleichungen (11) noch eine oder mehrere Differentialgleichungen s^{ter} oder niedrigerer Ordnung

$$\Omega\left(x_i, \xi_i, \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa}, \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j} \cdots \alpha_\varkappa, \alpha_{\varkappa\nu} \cdots\right) = \text{const.}$$

hinzufügen kann, derart, dass alles zusammengenommen ein System von Differentialgleichungen bildet, welches bei der unendlichen Gruppe (10) invariant bleibt.

Erinnern wir uns der analogen Entwickelungen, welche wir in § 1 Nr. 4 für die einfache Mannigfaltigkeit gegeben haben, so kommen wir sofort auf den Gedanken, dass jede solche Gleichung $\Omega = \text{const.}$ ein Integral des Systems (11) ist. Allein die Beweismethode, deren wir uns an dem angeführten Orte bedient haben, lässt uns hier im Stich; sie reicht nicht aus, um zu zeigen, dass $\Omega = \text{const.}$ wirklich ein Integral ist. Man wird diess sofort sehen, wenn man die dortigen Formeln verallgemeinert, was gar keine Schwierigkeit hat.

Einen Beweis für die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Vermuthung zu finden, ist mir noch nicht gelungen. Doch will ich nicht unterlassen zu bemerken, dass in allen Beispielen, welche ich durchgerechnet habe, die Gleichungen $\Omega = \text{const.}$ Integrale des Systems (11) sind. —

Noch wollen wir eines Umstandes kurz Erwähnung thun, den wir am Schlusse von § 1 für die einfache Mannigfaltigkeit etwas ausführlicher besprochen haben. Es ist diess die Thatsache, dass es auf die Differentialgleichungen (3′) keinen wesentlichen Einfluss hat, wenn man in die unendliche Gruppe (1) an Stelle von $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ die neuen Variabeln

$$(12) \qquad \alpha'_\varkappa = \omega_\varkappa(\alpha_1 \ldots \alpha_m) + \pi_\varkappa(x_1 \ldots x_n) \qquad (\varkappa = 1 \ldots m)$$

einführt, unter den $\omega_\varkappa$ und $\pi_\varkappa$ willkürliche Functionen ihrer Argumente verstanden. Diess auch hier ausführlich zu beweisen, dürfte kaum nöthig sein. Doch musste die Sache erwähnt werden, weil wir in den nächsten Paragraphen die unendliche Gruppe (1) immer durch

eine Transformation von der Form (12) auf eine möglichst einfache Gestalt gebracht denken. In den betreffenden Fällen sind übrigens die Functionen $\pi_\varkappa$ immer gleich Null.

§ 4.

Einige Specialuntersuchungen für die n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit.

13. *Zuerst werden wir solche unendliche Gruppen*

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_\varkappa U_\varkappa(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa}$$

betrachten, bei welchen in den $U_\varkappa$ nur Differentialquotienten erster Ordnung der φ_i vorkommen. Der Einfachheit wegen wollen wir noch voraussetzen, dass $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ selbst nicht auftreten.

Verstehen wir unter den $A_{i\varkappa} f$ infinitesimale Transformationen in $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ allein, so können wir die betreffenden Gruppen schreiben:

$$(1) \qquad Xf = \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa A_{i\varkappa} f \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa}.$$

Durch Combination mit

$$Yf = \sum_1^n{}_i \psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa A_{i\varkappa} f \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\varkappa}$$

erhalten wir daher die infinitesimale Transformation

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} (XY) = &\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\nu \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \\ &+ \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_\nu A_{i\varkappa} f \left(\varphi_\nu \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\nu \partial x_\varkappa} - \psi_\nu \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\nu \partial x_\varkappa} \right) + \\ &+ \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_\mu \sum_1^n{}_\nu (A_{i\varkappa}, A_{\mu\nu}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa} \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu}. \end{aligned} \right.$$

Diese Transformation muss aber wieder der Gruppe (1) angehören und in Folge dessen auf die Form

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} (XY) = &\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\nu \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \\ &+ \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_\nu A_{i\varkappa} f \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \right) \end{aligned} \right.$$

gebracht werden können.

Vergleichen wir beide Ausdrücke mit einander, so bemerken wir, dass eine ganze Reihe Glieder sich ohne Weiteres weghebt. Die Vergleichung der übrig bleibenden Ausdrücke wird aber dadurch erschwert, dass in (3) drei Summenzeichen stehen, in (2) dagegen vier.

Diesem Uebelstande können wir abhelfen, indem wir auch in (3) vier Summenzeichen einführen. Setzen wir nämlich fest, dass $\varepsilon_{\nu\nu}$ den Werth 1 hat, während $\varepsilon_{\mu\nu}$ immer verschwindet, sobald μ und ν von einander verschieden sind, so können wir das betreffende Glied von (3) in der Form

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x \sum_1^n{}_\mu \sum_1^n{}_\nu \varepsilon_{\mu\nu} A_{ix} \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_x} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu} \right)$$

darstellen oder noch anders:

$$\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x \sum_1^n{}_\mu \sum_1^n{}_\nu (\varepsilon_{i\nu} A_{\mu x} - \varepsilon_{\mu x} A_{i\nu}) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu}.$$

Nunmehr können wir die Vergleichung mit dem entsprechenden Ausdruck in (2) wirklich durchführen. Beachten wir dabei, dass die φ_i und ψ_i vollkommen willkürlich sind und dass jedes Product $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \frac{\partial \psi_\mu}{\partial x_\nu}$ unter den vier Summen nur ein einziges Mal vorkommt, so finden wir die Relationen:

$$(4) \qquad (A_{ix} A_{\mu\nu}) = \varepsilon_{i\nu} A_{\mu x} - \varepsilon_{\mu x} A_{i\nu}.$$

Es lässt sich a priori einsehen, dass die eben erhaltenen Werthe der Ausdrücke $(A_{ix} A_{\mu\nu})$ die Jacobi'sche Identität

$$(5) \qquad \big((A_{ix} A_{\mu\nu}) A_{\pi\varrho}\big) + \big((A_{\mu\nu} A_{\pi\varrho}) A_{ix}\big) + \big((A_{\pi\varrho} A_{ix}) A_{\mu\nu}\big) = 0$$

befriedigen. Denken wir uns nämlich aus den drei infinitesimalen Transformationen Xf, Yf und

$$Zf = \sum_1^n{}_i \chi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_x A_{ix} f \frac{\partial \chi_i}{\partial x_x}$$

den Ausdruck

$$(6) \qquad \big((X\,Y)\,Z\big) + \big((Y\,Z)\,X\big) + \big((Z\,X)\,Y\big),$$

welcher identisch verschwinden muss, gebildet, so erkennen wir, dass derselbe nur vermöge der Gleichungen (5) verschwindet.

Beachten wir aber weiter, dass z. B. $(X\,Y)$ vermöge (4) die Form (3) erhält und dass sich $((X\,Y)\,Z)$ in ähnlicher Weise ausdrückt, so sehen wir, dass der Ausdruck (6) auch vermöge (4) identisch verschwindet, was nach dem Vorangehenden nur möglich ist, wenn die Gleichungen (5) eine Folge von (4) sind.

Daraus folgt (vgl. Einl. F), dass die n^2 infinitesimalen Transformationen $A_{ix}f$ eine endliche Gruppe erzeugen, deren Zusammensetzung durch die Relationen (4) bestimmt ist. Dass es übrigens Gruppen giebt, welche die Relationen (4) befriedigen, hätten wir in dem vorliegenden einfachen Falle kürzer erkennen können. Setzen wir nämlich $A_{ix}f = -x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$, so werden die Gleichungen (4) erfüllt und wir finden daher, dass die infinitesimalen Transformationen $A_{ix}f$ eine mit der Gruppe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ isomorphe Gruppe erzeugen müssen. Die Gruppe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ aber enthält n^2 Parameter und ist die allgemeine lineare homogene Gruppe der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit; die endlichen Gleichungen dieser Gruppe sind:

$$x_i' = \sum_1^n{}^x a_{ix} x_x \qquad (i = 1 \ldots n).$$

Die Gruppe der $A_{ix}f$ ist mit der Gruppe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ entweder holoedrisch oder meroedrisch isomorph. Den Fall des holoedrischen Isomorphismus wollen wir bei Seite lassen, da seine Behandlung zu weitläufig werden möchte. *Dagegen wollen wir diejenigen Gruppen bestimmen, welche mit der Gruppe* $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ *meroedrisch isomorph sind und dabei die geringste mögliche Anzahl von Variabeln enthalten.*

Die allgemeine lineare homogene Gruppe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ enthält nur die beiden invarianten Untergruppen

$$x_i \frac{\partial f}{\partial x_x},\ x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - x_x \frac{\partial f}{\partial x_x} (i \neq x); \qquad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Nach dem in der Einleitung unter F gesagten findet man daher auch nur zwei verschiedene Arten von Gruppen $A_{ix}f$, welche mit der Gruppe $x_i \frac{\partial f}{\partial x_x}$ meroedrisch isomorph sind. Zwischen den infinitesimalen Transformationen $A_{ix}f$ dieser beiden Arten von Gruppen bestehen bezüglich folgende Relationen:

$$A_{ix} = 0 \ (i \neq x), \quad A_{11} = A_{22} = \cdots = A_{nn}; \quad A_{11} + \cdots + A_{nn} = 0.$$

Im ersten Falle bleibt also überhaupt nur eine einzige infinitesimale Transformation übrig; die einfachste Gruppe ergiebt sich, wenn eine einzige Variable α transformirt wird. Man kann dann setzen

$$A_{11} = \cdots = A_{nn} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

und erhält so folgende Form der unendlichen Gruppe (1):

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial \alpha}$$

und daraus bekommt man die Definitionsgleichung:

$$(7) \qquad \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \xi_1 - \cdots - \frac{\partial \alpha}{\partial x_n} \xi_n = 0.$$

Diese Differentialgleichung, in welcher α als ganz beliebige Function von $x_1 \ldots x_n$ zu betrachten ist, definirt eine Schaar von unendlichen Gruppen, welche unter einander ähnlich sind (vgl. Chr. Videnskabss. Forh. 1883, Nr. 12, pag. 18ff., wo Lie diess für zwei Variabeln x und y beweist). Setzt man in (7) speciell $\alpha = 0$, so kommt man auf die unendliche Gruppe, welche alle Volumina des Raumes $x_1 \ldots x_n$ invariant lässt.

Den zweiten Fall wollen wir nur andeutungsweise behandeln. Von den n^2 infinitesimalen Transformationen A_{ix} sind da nur $n^2 - 1$ unabhängig, etwa:

$$A_{ix} (i \neq x), \quad A_{11} \ldots A_{n-1,n-1}.$$

Es zeigt sich, dass diese $(n^2 - 1)$gliedrige Gruppe mit der allgemeinen projectivischen Gruppe

$$(8) \qquad \frac{\partial f}{\partial y_i}, \; y_i \frac{\partial f}{\partial y_x}, \; y_i \sum_1^{n-1}{}_j y_j \frac{\partial f}{\partial y_j} \qquad (i, x = 1 \ldots n-1)$$

der $(n-1)$fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit $y_1 \ldots y_{n-1}$ gleichzusammengesetzt ist. Berücksichtigt man aber einen Satz von Lie (Ann. Bd. XXV pag. 132), so erkennt man, dass es in weniger als $n-1$ Variabeln keine $(n^2 - 1)$gliedrige Gruppe von dieser Zusammensetzung giebt, während dagegen in $n-1$ Variabeln alle derartigen Gruppen mit der Gruppe (8) ähnlich sind. Bei der näheren Untersuchung ergiebt sich, dass die Gruppe $A_{ix} (i \neq x)$, $A_{11} \ldots A_{n-1,n-1}$ in $n-1$ Variabeln $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$ auf zwei wesentlich verschiedene Weisen die Form (8) erhalten kann; entweder nämlich ist:

$$A_{in} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad A_{ni} = -\alpha_i \sum_1^{n-1}{}_j \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \quad A_{ix} = \alpha_x \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}.$$

oder es ist:

$$A_{in} = \alpha_i \sum_1^{n-1}{}_j \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \quad A_{ni} = -\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad A_{ix} = -\alpha_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_x}.$$

Für A_{nn} ergeben sich dabei bezüglich die Werthe:

$$A_{nn} = -\sum_1^{n-1}{}_j \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}, \quad A_{nn} = \sum_1^{n-1}{}_j \alpha_j \frac{\partial f}{\partial \alpha_j}.$$

Die zwei unendlichen Gruppen (1), welche diesen beiden Möglichkeiten entsprechen, sind:

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^{n-1}{}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \sum_1^{n-1}{}_i \sum_1^{n-1}{}_x \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \alpha_x \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} -$$
$$- \sum_1^{n-1}{}_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \alpha_i \sum_1^{n-1}{}_x \alpha_x \frac{\partial f}{\partial \alpha_x} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \sum_1^{n-1}{}_x \alpha_x \frac{\partial f}{\partial \alpha_x},$$

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \sum_1^{n-1}{}_i \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} - \sum_1^{n-1}{}_i \sum_1^{n-1}{}_x \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_x} +$$
$$+ \sum_1^{n-1}{}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} \alpha_i \sum_1^{n-1}{}_x \alpha_x \frac{\partial f}{\partial \alpha_x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \sum_1^{n-1}{}_x \alpha_x \frac{\partial f}{\partial \alpha_x}.$$

Hieraus bekommt man endlich die beiden Systeme von Definitionsgleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_n} + \sum_1^{n-1}{}_x \alpha_x \dfrac{\partial \xi_i}{\partial x_x} - \alpha_i \left(\dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_n} + \sum_1^{n-1}{}_x \alpha_x \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_x} \right) - \sum_1^n{}_\nu \alpha_{i\nu} \xi_\nu = 0 \\ (i = 1 \ldots n-1), \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_i} + \sum_1^{n-1}{}_x \alpha_x \dfrac{\partial \xi_x}{\partial x_i} - \alpha_i \left(\dfrac{\partial \xi_n}{\partial x_n} + \sum_1^{n-1}{}_x \alpha_x \dfrac{\partial \xi_x}{\partial x_n} \right) + \sum_1^n{}_\nu \alpha_{i\nu} \xi_\nu = 0 \\ (i = 1 \ldots n-1). \end{cases}$$

Die Gleichungen (9) definiren die unendliche Gruppe aller infinitesimalen Transformationen, welche das Pfaff'sche Gleichungensystem

$$dx_i - \alpha_i dx_n = 0 \qquad (i = 1 \ldots n-1)$$

invariant lassen. Die Gleichungen (10) definiren die unendliche Gruppe aller infinitesimalen Transformationen, welche die Pfaff'sche Gleichung

$$dx_n + \sum_1^{n-1}{}_i \alpha_i dx_i = 0$$

invariant lassen.

14. *Jetzt zur Betrachtung solcher Gruppen*

$$\sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m{}_x U_x(\alpha, \varphi) \frac{\partial f}{\partial \alpha_x},$$

in welchen die $U_\varkappa$ Differentialquotienten 1. *und* 2. *Ordnung der φ_i enthalten, während die φ_i selbst nicht darin vorkommen.*

Wir schreiben diese infinitesimalen Transformationen in der Form:

$$(11)\quad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa A_{i\varkappa} f \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\varkappa} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_j A_{i\varkappa j} f \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j}.$$

Dabei verstehen wir unter den $A_{i\varkappa} f$ und $A_{i\varkappa j} f$ infinitesimale Transformationen in den Variabeln $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ allein und setzen ausserdem fest, dass $A_{i\varkappa j} f$ gleich $A_{ij\varkappa} f$ sein soll, dass also jeder Differentialquotient $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j}$ mit dem Factor $2 A_{i\varkappa j} f$ auftritt, sobald $\varkappa$ und j von einander verschieden sind.

Combiniren wir nun die infinitesimale Transformation

$$\sum_1^n{}_i \psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa A_{i\varkappa} f \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\varkappa} + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_j A_{i\varkappa j} f \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j}$$

mit der obigen, so müssen wir bekommen:

$$(12)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\nu \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}\right) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \\ \displaystyle + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_\nu A_{i\varkappa} f \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}\right) + \\ \displaystyle + \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \sum_1^n{}_j \sum_1^n{}_\nu A_{i\varkappa j} f \frac{\partial^2}{\partial x_\varkappa \partial x_j} \left(\varphi_\nu \frac{\partial \psi_i}{\partial x_\nu} - \psi_\nu \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_\nu}\right). \end{cases}$$

Durch directe Combination kommt ein anderer Ausdruck, welcher mit dem eben geschriebenen identisch sein muss. Vergleichen wir beide, so fällt uns zunächst auf, dass alle Glieder, in welchen φ_ν oder ψ_ν selbst vorkommen, sich wegheben. Ferner ergiebt sich wie in der vorigen Nummer

$$(A_{i\varkappa} A_{\mu\nu}) = \varepsilon_{i\nu} A_{\mu\varkappa} - \varepsilon_{\mu\varkappa} A_{i\nu};$$

endlich schliessen wir noch, dass stets

$$(A_{i\varkappa j} A_{\mu\nu\pi}) = 0$$

ist, denn in (12) kommt ein Glied von der Form

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j} \frac{\partial' \psi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\pi} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_\varkappa \partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_\mu}{\partial x_\nu \partial x_\pi}$$

nicht vor.

Was übrig bleibt, ist die Gleichung:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_\varkappa\sum_1^n{}_\mu\sum_1^n{}_\nu\sum_1^n{}_\pi (A_{i\varkappa}A_{\mu\nu\pi})\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial^2\psi_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\pi}-\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\pi}\right)\\ &=\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_\varkappa\sum_1^n{}_j\sum_1^n{}_\nu A_{i\varkappa j}\left\{\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_\nu\partial x_j}-\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\nu\partial x_j}+\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x_\nu\partial x_\varkappa}-\right.\\ &\qquad\left.-\frac{\partial\psi_\nu}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_\nu\partial x_\varkappa}-\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial x_\varkappa\partial x_j}-\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\nu}\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x_\varkappa\partial x_j}\right)\right\}.\end{aligned}\right.$$

Um hier die Vergleichung zu erleichtern, führen wir wieder die Grössen $\varepsilon_{i\varkappa}$ ein und können so die rechte Seite von (13) in etwas veränderter Gestalt folgendermassen schreiben:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}&\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_\varkappa\sum_1^n{}_\mu\sum_1^n{}_\nu\sum_1^n{}_\pi\{\varepsilon_{i\nu}A_{\mu\varkappa\pi}+\varepsilon_{i\pi}A_{\mu\nu\varkappa}-\\ &\qquad-\varepsilon_{\mu\varkappa}A_{i\nu\pi}\}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial^2\psi_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\pi}-\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\pi}\right).\end{aligned}\right.$$

Ueber den Ausdruck (14) bemerken wir, dass jedes Glied

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial^2\psi_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\pi}-\frac{\partial\psi_i}{\partial x_\varkappa}\frac{\partial^2\varphi_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\pi},$$

wenn ν und π verschieden sind, zweimal vorkommt aber beide Male mit demselben Factor; dagegen kommt das Glied nur einmal vor, wenn ν und π gleich sind. Dieselbe Bemerkung lässt sich über die linke Seite von (13) machen. Da nun die φ_i und ψ_i vollkommen willkürlich sind, finden wir aus (13) und (14) die Formel

$$(A_{i\varkappa}A_{\mu\nu\pi})=\varepsilon_{i\nu}A_{\mu\varkappa\pi}+\varepsilon_{i\pi}A_{\mu\nu\varkappa}-\varepsilon_{\varkappa\mu}A_{i\nu\pi},$$

welche allgemein gilt, gleichgültig, ob ν und π verschieden oder einander gleich sind.

Die infinitesimalen Transformationen $A_{i\varkappa}f$, $A_{i\varkappa j}f$ müssen demnach folgende Relationen befriedigen:

$$(15)\quad \begin{cases}(A_{i\varkappa}A_{\mu\nu})=\varepsilon_{i\nu}A_{\mu\varkappa}-\varepsilon_{\mu\varkappa}A_{i\nu}, & (A_{i\varkappa j}A_{\mu\nu\pi})=0\\ (A_{i\varkappa}A_{\mu\nu\pi})=\varepsilon_{i\nu}A_{\mu\varkappa\pi}+\varepsilon_{i\pi}A_{\mu\nu\varkappa}-\varepsilon_{\varkappa\mu}A_{i\nu\pi}.\end{cases}$$

Auf Grund solcher Ueberlegungen, wie wir sie in der vorigen Nummer durchgeführt haben, ist es hier a priori klar, dass die Relationen (15) die Jacobi'sche Identität befriedigen und dass es daher Gruppen giebt, welche die Zusammensetzung (15) haben.

Ebenso wie in der vorigen Nummer handelt es sich auch jetzt wieder darum, in den Variabeln $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ Gruppen aufzustellen, welche die Zusammensetzung (15) oder eine damit meroedrisch isomorphe Zusammensetzung besitzen.

Die einfachsten Gruppen von dieser Beschaffenheit werden wir später (§ 5) wenigstens für die Ebene vollständig aufstellen. Dagegen wollen wir jetzt noch in voller Allgemeinheit das Problem behandeln, die Zusammensetzungen aller Gruppen zu bestimmen, welche mit der Zusammensetzung (15) meroedrisch isomorph sind. Wie schon früher bemerkt (vgl. Einl. F), müssen wir dazu erst die invarianten Untergruppen der Gruppe $A_{i\varkappa} f$, $A_{i\varkappa j} f$ von der Zusammensetzung (15) aufstellen.

15. Zuvörderst werden wir diejenigen invarianten Untergruppen der Gruppe $A_{i\varkappa} f$, $A_{i\varkappa j} f$ von vornherein ausschliessen, welche alle Transformationen $A_{i\varkappa j} f$ enthalten. Diese Untergruppen würden nämlich offenbar nur solche meroedrisch isomorphe Gruppen liefern, welche wir schon in Nr. 13 bestimmt haben.

Enthält ferner eine invariante Untergruppe Transformationen von der Form

$$\sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa \alpha_{i\varkappa} A_{i\varkappa} + \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa \sum_1^n{}^j \alpha_{i\varkappa j} A_{i\varkappa j}$$

und verschwinden nicht alle $\alpha_{i\varkappa}$, so müssen offenbar alle auftretenden Ausdrücke $\Sigma\Sigma\alpha_{i\varkappa} A_{i\varkappa}$ in der Gruppe der $A_{i\varkappa}$ eine invariante Untergruppe bilden. Diese Ausdrücke besitzen daher eine der beiden Formen

$$A_{11} + \cdots + A_{nn}; \quad A_{i\varkappa}, \; A_{ii} - A_{\varkappa\varkappa} \, (i \gtrless \varkappa),$$

wenn nicht etwa alle n^2 $A_{i\varkappa}$ vorhanden sind.

In jedem dieser drei Fälle giebt es eine oder mehrere Transformationen von der Form

$$S = \sum_1^n{}^i \alpha_i A_{ii} + \sum_1^n{}^i \sum_1^n{}^\varkappa \sum_1^n{}^j \beta_{i\varkappa j} A_{i\varkappa j},$$

also enthält die invariante Untergruppe auch die folgenden Transformationen:

$$(S, A_{\mu\nu\pi}) = (\alpha_\nu + \alpha_\pi - \alpha_\mu) A_{\mu\nu\pi}.$$

Da man aber in jedem der drei Fälle die Factoren α_μ, α_ν, α_π so wählen kann, dass der Ausdruck $\alpha_\nu + \alpha_\pi - \alpha_\mu$ nicht verschwindet, giebt es in der invarianten Untergruppe die Transformation $A_{\mu\nu\pi}$ und, da μ, ν, π willkürlich sind, überhaupt alle diese Transformationen. Solche Untergruppen gehören aber in die Reihe der ausgeschlossenen.

Uebrig bleiben also nur diejenigen invarianten Untergruppen, deren Transformationen aus den $A_{\mu\nu\pi}$ allein gebildet sind.

Es sei

$$\sum_1^n{}^\mu \sum_1^n{}^\nu \sum_1^n{}^\pi \alpha_{\mu\nu\pi} A_{\mu\nu\pi} \tag{16}$$

eine Transformation einer Gruppe von dieser Art. Indem wir zweimal hintereinander mit A_{11} combiniren, erhalten wir die folgenden beiden infinitesimalen Transformationen, welche ebenfalls der invarianten Untergruppe angehören:

$$2\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\,\alpha_{\mu 1\pi}A_{\mu 1\pi}-\sum_{1}^{n}{}'_{\nu}\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\,\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi},$$

$$2\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\,\alpha_{\mu 1\pi}A_{\mu 1\pi}+2\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\,\alpha_{\mu 11}A_{\mu 11}-4\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\alpha_{11\pi}A_{11\pi}+$$

$$+\sum_{1}^{n}{}'_{\nu}\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\,\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi}.$$

Durch Subtraction der oberen Transformation von der unteren finden wir von dem Factor 2 abgesehen:

$$\sum_{1}^{n}{}'_{\nu}\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\,\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi}+\sum_{1}^{n}{}_{\mu}\,\alpha_{\mu 11}A_{\mu 11}-2\sum_{1}^{n}{}_{\pi}\,\alpha_{11\pi}A_{11\pi}$$

oder zusammengezogen:

$$\sum_{2}^{n}{}'_{\nu}\sum_{2}^{n}{}_{\pi}\,\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi}+\sum_{2}^{n}{}_{\mu}\,\alpha_{\mu 11}A_{\mu 11}$$

und durch abermalige Combination mit A_{11}:

$$-\sum_{2}^{n}{}'_{\nu}\sum_{2}^{n}{}_{\pi}\,\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi}+2\sum_{2}^{n}{}_{\mu}\,\alpha_{\mu 11}A_{\mu 11}.$$

Folglich enthält unsere Untergruppe auch die Transformationen:

$$\sum_{2}^{n}{}_{\mu}\,\alpha_{\mu 11}A_{\mu 11},\qquad\sum_{2}^{n}{}'_{\nu}\sum_{2}^{n}{}_{\pi}\,\alpha_{1\nu\pi}A_{1\nu\pi}.$$

Bei Combination mit A_{22} ergiebt sich

$$-\alpha_{211}A_{211},\qquad 2\sum_{2}^{n}{}_{\pi}\,\alpha_{12\pi}A_{12\pi}$$

und endlich bei Combination des letzten Ausdrucks mit A_{33}

$$2\alpha_{123}A_{123}.$$

Es ist klar, dass man auf diese Weise überhaupt alle Glieder $\alpha_{\mu\nu\pi}A_{\mu\nu\pi}$ herleiten kann, in welchen μ weder gleich ν noch gleich π ist.

Giebt es daher in einer der gesuchten invarianten Untergruppen eine Transformation (16), *in welcher nicht alle* $\alpha_{\mu\nu\pi}$ $(\nu, \pi \gtrless \mu)$ *gleich*

Null sind, so kommt in dieser Untergruppe jedenfalls eine Transformation $A_{\mu\nu\pi}\,(\nu, \pi \gtrless \mu)$ *vor* und wir behaupten *alle.*

Zunächst sei die Zahl n, welche wir nebenbei bemerkt immer mindestens gleich 2 voraussetzen, grösser als 2 und in dem vorhandenen $A_{\mu\nu\pi}$ sei auch $\nu \neq \pi$, nennen wir es etwa A_{123}. Wir bilden:

$$(A_{i\varkappa} A_{123}) = \varepsilon_{i2} A_{1\varkappa 3} + \varepsilon_{i3} A_{12\varkappa} - \varepsilon_{\varkappa 1} A_{i23}$$

und setzen darin $i = 3$, $\varkappa = 2$; dabei ergiebt sich A_{122}, welches ebenfalls der invarianten Untergruppe angehört. Unter allen Umständen können wir daher voraussetzen, dass in dem auftretenden $A_{\mu\nu\pi}$ ν gleich π ist; wir nennen es deshalb A_{122} und brauchen nunmehr auch die Beschränkung $n > 2$ nicht aufrecht zu erhalten.

Nun gehört mit A_{122} auch die Transformation

$$(A_{i\varkappa} A_{122}) = 2\varepsilon_{i2} A_{12\varkappa} - \varepsilon_{\varkappa 1} A_{i22}$$

der invarianten Untergruppe an. Wählen wir daher $\varkappa = 1$, $i \gtrless 2$, so bekommen wir alle A_{i22} $(i \gtrless 2)$; ferner ergiebt $\varkappa > 1$, $i = 2$ alle $A_{12\varkappa}$ $(\varkappa > 1)$ und, da wir alle A_{i22} $(i \gtrless 2)$ haben, erhalten wir überhaupt alle $A_{i2\varkappa}$ $(i \gtrless \varkappa,\ i \gtrless 2)$. Wie wir oben A_{i22} aus A_{123} herleiteten, können wir jetzt aus $A_{i2\varkappa}$ alle $A_{j\varkappa\varkappa}$ $(j \gtrless \varkappa)$ herleiten. Endlich liefert uns noch die Gleichung:

$$(A_{i\varkappa},\ A_{\mu\nu\nu}) = 2\varepsilon_{i\nu} A_{\mu\nu\varkappa} - \varepsilon_{\varkappa\mu} A_{i\nu\nu} \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

bei der Substitution $i = \nu$, $\varkappa \gtrless \mu$ alle $A_{\mu\nu\varkappa}$ $(\mu \gtrless \nu,\ \varkappa)$, wie wir behauptet hatten; überdiess aber erhalten wir bei der Substitution $i = \nu$, $\varkappa = \mu$ noch:

$$2A_{\mu\mu\nu} - A_{\nu\nu\nu} \quad (\mu \gtrless \nu).$$

Man kann unmittelbar verificiren, dass die infinitesimalen Transformationen

$$A_{\mu\nu\pi},\ A_{\mu\mu\mu} - 2A_{\nu\nu\mu}\ (\nu,\ \pi \gtrless \mu) \tag{17}$$

eine invariante Untergruppe von der gesuchten Art bilden. Gäbe es nun eine invariante Untergruppe, in welcher alle Transformationen (17) und ausserdem noch andere vorhanden wären, so müsste dieselbe eine Transformation

$$\sum_1^n{}_\mu \gamma_\mu A_{\mu\mu\mu}$$

enthalten, wo nicht alle γ_μ verschwänden. Wäre hier etwa $\gamma_1 \neq 0$, so erhielte man durch Combination mit A_{11} sofort A_{111}, also träten alle $A_{\mu\mu 1}$ auf und, weil

$$(A_{1\mu}\, A_{\mu\mu}) = A_{\mu\mu\mu} - A_{1\mu 1} \quad (\mu > 1)$$

ist, enthielte die Gruppe alle $A_{\mu\mu\mu}$ u. s. w. kurz überhaupt alle $A_{\mu\nu\pi}$, was ausgeschlossen ist.

Jetzt sind noch diejenigen invarianten Untergruppen zu bestimmen, welche nur solche Transformationen (16) *enthalten, in denen alle* $\alpha_{\mu\nu\pi}\,(\nu, \pi \gtrless \mu)$ *gleich Null sind.* Jede Transformation einer solchen Gruppe hat die Form:

$$\sum_1^n{}_{\mu} \sum_1^n{}_{\pi} \alpha_{\mu\mu\pi} A_{\mu\mu\pi}.$$

Durch Combination mit $A_{\varkappa\varkappa}$ bekommen wir

$$\sum_1^n{}_{\pi} \alpha_{\varkappa\varkappa\pi} A_{\varkappa\varkappa\pi} + \sum_1^n{}_{\mu} \alpha_{\mu\mu\varkappa} A_{\mu\mu\varkappa} - \sum_1^n{}_{\pi} \alpha_{\varkappa\varkappa\pi} A_{\varkappa\varkappa\pi}$$

oder zusammengezogen:

$$\sum_1^n{}_{\mu} \alpha_{\mu\mu\varkappa} A_{\mu\mu\varkappa}.$$

Die Combination mit $A_{i\varkappa}\,(i \gtrless \varkappa)$ ergiebt:

$$\alpha_{ii\varkappa} A_{i\varkappa\varkappa} - \alpha_{\varkappa\varkappa\varkappa} A_{i\varkappa\varkappa},$$

da aber $A_{i\varkappa\varkappa}$ nicht vorkommt, muss

$$\alpha_{ii\varkappa} = \alpha_{\varkappa\varkappa\varkappa} = \alpha_{\varkappa}$$

werden. Die $\alpha_{\varkappa}$ dürfen offenbar nicht alle verschwinden, also enthält unsere Untergruppe sicher eine Transformation von der Form

$$\sum_1^n{}_{\mu} A_{\mu\mu\pi};$$

bilden wir jetzt noch $(\varkappa \gtrless \pi)$:

$$\left(A_{\pi\varkappa}, \sum_1^n{}_{\mu} A_{\mu\mu\pi}\right) = A_{\pi\varkappa\pi} + \sum_1^n{}_{\mu} A_{\mu\mu\varkappa} - A_{\pi\varkappa\pi},$$

so erkennen wir, dass unsere Untergruppe die n Transformationen

$$\sum_1^n{}_{\mu} A_{\mu\mu\nu} \quad (\nu = 1 \ldots n) \tag{18}$$

enthält. Mehr kann sie nach dem Vorhergehenden nicht enthalten. Wirklich bestätigt man leicht, dass die infinitesimalen Transformationen (18) eine invariante Untergruppe bilden.

Damit sind alle invarianten Untergruppen gefunden, welche nicht zu den ausgeschlossenen gehören; es sind nur die *zwei* (17) und (18). *Deshalb erhalten wir auch nur zwei Arten von Gruppen, welche eine*

mit (15) *meroedrisch isomorphe Zusammensetzung haben. Die erste Art ist durch die Gleichungen*

$$(19) \qquad A_{\mu\nu\pi} = 0, \quad A_{\mu\mu\mu} - 2A_{\nu\nu\mu} = 0 \quad (\nu, \pi \neq \mu)$$

charakterisirt, die zweite durch die Gleichungen

$$(20) \qquad A_{11\pi} + A_{22\pi} + \cdots + A_{nn\pi} = 0 \quad (\pi = 1 \ldots n).$$

Die einfachsten Gruppen, welche diesen Zusammensetzungen entsprechen, wollen wir, wie gesagt, nur für die *Ebene* vollständig aufstellen (vgl. § 5), *doch soll wenigstens der Fall* (19) *allgemein behandelt werden.*

Von den infinitesimalen Transformationen $A_{\mu\nu\pi}$ sind da nur n unabhängig, etwa $A_{111} \ldots A_{nnn}$ und es bestehen nach (15) die Gleichungen

$$(A_{i\varkappa}\, A_{\pi\pi\pi}) = 2\varepsilon_{i\pi}\, A_{\pi\varkappa\pi} - \varepsilon_{\varkappa\pi}\, A_{i\pi\pi}.$$

Da wir $A_{i\pi\pi} = \varepsilon_{i\pi} A_{\pi\pi\pi}$ setzen können, wird:

$$(A_{i\varkappa}\, A_{\pi\pi\pi}) = \varepsilon_{i\pi}\,(2A_{\pi\varkappa\pi} - \varepsilon_{\varkappa\pi}\, A_{\pi\pi\pi}),$$

woraus sich bei näherer Betrachtung der beiden Fälle $\varkappa \neq \pi$ und $\varkappa = \pi$ die Formel

$$(A_{i\varkappa}\, A_{\pi\pi\pi}) = \varepsilon_{i\pi}\, A_{\pi\pi\pi}$$

ergiebt.

Der einfachste Fall ist nun der, dass die Zahl m der Variabeln α gleich n und dass die n-gliedrige Gruppe $A_{111} \ldots A_{nnn}$ transitiv ist. Wir können dann die Variabeln $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ so wählen, dass

$$A_{\pi\pi\pi} = 2A_{\nu\nu\pi} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_\pi} \quad (\pi = 1 \ldots n)$$

wird. Aus den Gleichungen

$$\left(\sum_1^n{}^i A_{ii},\ A_{\pi\pi\pi}\right) = A_{\pi\pi\pi}$$

erhalten wir nunmehr

$$\sum_1^n{}^i A_{ii} = -\sum_1^n{}^i (\alpha_i + c_i)\frac{\partial f}{\partial \alpha_i}$$

oder, indem wir die $\alpha_i + c_i$ als neue α_i einführen:

$$\sum_1^n{}^i A_{ii} = S = -\sum_1^n{}^i \alpha_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}.$$

Auf der andern Seite kommt:

$$A_{i\varkappa} = -\alpha_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_\varkappa} + \sum_1^n{}^\nu h_{i\varkappa\nu} \frac{\partial f}{\partial \alpha_\nu};$$

da aber $(A_{ix}, S) = 0$ ist, müssen alle $h_{ix\nu}$ verschwinden und es wird einfach

$$A_{ix} = -\alpha_i \frac{\partial f}{\partial \alpha_x}.$$

Die betreffende unendliche Gruppe (1) hat die Form:

$$(21) \quad \sum_1^n{}_i \varphi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^n{}_x \left\{ \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{\partial x_\nu \partial x_x} - \sum_1^n{}_i \alpha_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_x} \right\} \frac{\partial f}{\partial \alpha_x};$$

sie liefert die Definitionsgleichungen:

$$(22) \quad \sum_1^n{}_\nu \frac{\partial^2 \xi_\nu}{\partial x_\nu \partial x_x} - \sum_1^n{}_i \alpha_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x_x} - \sum_1^n{}_\pi \alpha_{x\pi} \xi_\pi = 0 \quad (x = 1 \ldots n).$$

Als Bedingungen für die unbeschränkte Integrabilität dieses Systems erhält man $\frac{n(n-1)}{1.2}$ Gleichungen, nämlich $\alpha_{ix} = \alpha_{xi}$ oder $\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_x} = \frac{\partial \alpha_x}{\partial x_i}$, so dass also eine Function $\alpha(x_1 \ldots x_n)$ existirt, durch welche sich die α_i in der Form $\alpha_i = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i}$ ausdrücken. Es lässt sich leicht direct verificiren, dass die Integrabilitätsbedingungen $\alpha_{ix} = \alpha_{xi}$ $(i, x = 1 \ldots n)$ die unendliche Gruppe (21) gestatten.

§ 5.

Drei wichtige Gruppen der Ebene.

16. Die unendliche Gruppe (1) des § 4 schreiben wir in der Ebene folgendermassen:

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(x,y) \frac{\partial f}{\partial x} + \psi(x,y) \frac{\partial f}{\partial y} + Af\,\varphi_x + Bf\,\varphi_y + Cf\,\psi_x + Df\,\psi_y + \\ + Ef\,\varphi_{xx} + 2Ff\,\varphi_{xy} + Gf\,\varphi_{yy} + Hf\,\psi_{xx} + 2If\,\psi_{xy} + Kf\,\psi_{yy}. \end{cases}$$

Zwischen den infinitesimalen Transformationen $Af \ldots Kf$ bestehen hier nach § 4 Formeln (15) die Relationen:

$$(2) \quad \begin{cases} (AB) = (BD) = -B,\ (AC) = (CD) = C, \\ (AD) = 0,\ (BC) = D - A, \\ E = (AE),\ 2F = (BE) = 2(DF), \\ 2G = 2(BF) = (DG) = -2(AG) = -2(BK), \\ 2H = 2(CJ) = (AH) = -2(DH) = -2(CE), \\ 2J = (CK) = 2(AJ),\ K = (DK), \\ (CF) = E - J,\ (BJ) = K - F,\ (BH) = 2J - E,\ (CG) = 2F - K, \\ (AF) = (AK) = (BG) = (CH) = (DE) = (DJ) = 0. \end{cases}$$

Ausserdem sind E, F, G, H, J, K paarweise vertauschbar. Für das Folgende ist es endlich noch von Vortheil die Relationen:

$$(3) \qquad (A+D, E) = E \cdots (A+D, K) = K$$

anzumerken.

Nach den Untersuchungen in Nr. 15 des vorhergehenden Paragraphen haben wir drei Fälle zu unterscheiden. Von den sechs infinitesimalen Transformationen $E \ldots K$, welche offenbar selbst eine Gruppe erzeugen, können nämlich entweder zwei oder vier oder es können endlich auch alle sechs von einander unabhängig sein. Im ersten Falle bestehen die Relationen:

$$G = 0, \; H = 0, \; 2J - E = 0, \; 2F - K = 0,$$

im zweiten die Relationen

$$E + J = 0, \quad F + K = 0$$

(vgl. § 4 Formeln (19) und (20)).

Wir nehmen bei jedem dieser drei Fälle an, dass es ebensoviele Variabeln $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ giebt als unabhängige unter den infinitesimalen Transformationen $E \ldots K$. Ferner setzen wir voraus, dass diese unabhängigen infinitesimalen Transformationen eine transitive Gruppe bilden.

I. Den ersten der drei angegebenen Fälle haben wir für n Variabeln schon am Schlusse des vorigen Paragraphen erledigt. Deshalb können wir uns hier in der Ebene darauf beschränken, die betreffenden Definitionsgleichungen anzugeben. Dieselben lauten:

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi_{xx} + \eta_{xy} - \alpha\xi_x - \beta\eta_x - \alpha_x\xi - \alpha_y\eta = 0, \\ \xi_{xy} + \eta_{yy} - \alpha\xi_y - \beta\eta_y - \beta_x\xi - \beta_y\eta = 0, \end{cases}$$

wo die Functionen α und β der Integrabilitätsbedingung $\alpha_y - \beta_x = 0$ genügen müssen. Von den Differentialgleichungen (4) kann man ohne Weiteres ein Integral angeben, nämlich:

$$\xi_x + \eta_y - \alpha\xi - \beta\eta = \text{const.};$$

zu demselben könnten übrigens auch noch unsere Betrachtungen in Nr. 12 des § 3 führen. Ueber die Gruppen (4) vergleiche man sonst Lie, Unendliche continuirliche Gruppen § 6 Nr. 14 und § 8 Nr. 22.

II. Fall. Eliminiren wir E und K vermöge der Relationen $E+J=0$, $F+K=0$, so erhalten wir aus (2):

$$(5) \qquad \begin{cases} (AF) = 0, \quad (AG) = -G, \; (AH) = 2H, \; (AJ) = J, \\ (BF) = G, \; (BG) = 0, \quad (BH) = 3J, \; (BJ) = -2F \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die vier unabhängigen Variabeln in den infinitesimalen Transformationen F, G, H, J mögen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ heissen. Wir wählen dieselben so, dass

$$F = -K = \frac{\partial f}{\partial \lambda}, \quad G = \frac{\partial f}{\partial \mu}, \quad H = \frac{\partial f}{\partial \nu}, \quad J = -E = \frac{\partial f}{\partial \varrho}$$

wird. Nun zeigen die Relationen (3), dass $A + D$ bei geeigneter Wahl der Variabeln die Form:

$$A + D = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} - \nu \frac{\partial f}{\partial \nu} - \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho}$$

erhalten kann; die Gleichungen (5) aber ergeben weiter:

$$(6)\begin{cases} A = \mu \frac{\partial f}{\partial \mu} - 2\nu \frac{\partial f}{\partial \nu} - \varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho}, & B = 2\varrho \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \mu} - 3\nu \frac{\partial f}{\partial \varrho}, \\ C = -3\mu \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \varrho \frac{\partial f}{\partial \nu} + 2\lambda \frac{\partial f}{\partial \varrho}, & D = -\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda} - 2\mu \frac{\partial f}{\partial \mu} + \nu \frac{\partial f}{\partial \nu}. \end{cases}$$

Nach den gewöhnlichen Regeln (vgl. § 3 Nr. 10, Satz 4) finden wir daher die vier Definitionsgleichungen:

$$(7)\begin{cases} 2\xi_{xy} - \eta_{yy} + 2\varrho\xi_y - 3\mu\eta_x - \lambda\eta_y - \lambda_x\xi - \lambda_y\eta = 0, \\ \xi_{yy} + \mu\xi_x - \lambda\xi_y - 2\mu\eta_y - \mu_x\xi - \mu_y\eta = 0, \\ \eta_{xx} - 2\nu\xi_x - \varrho\eta_x + \nu\eta_y - \nu_x\xi - \nu_y\eta = 0, \\ 2\eta_{xy} - \xi_{xx} - \varrho\xi_x - 3\nu\xi_y + 2\lambda\eta_x - \varrho_x\xi - \varrho_y\eta = 0. \end{cases}$$

Die Integrabilitätsbedingungen dieses Systems erhält man erst nach zweimaliger Differentiation. Hat man ein System Functionen $\lambda, \mu, \nu, \varrho$, welches den Integrabilitätsbedingungen genügt, so definiren die Gleichungen (7) eine Gruppe, welche mit der allgemeinen projectivischen Gruppe der Ebene ähnlich ist. Die Definitionsgleichungen der letzteren erhält man aus (7) durch die Substitution $\lambda = \mu = \nu = \varrho = 0$, nämlich:

$$2\xi_{xy} - \eta_{yy} = 0, \quad \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} = 0, \quad 2\eta_{xy} - \xi_{xx} = 0.$$

III. Fall. Wir haben jetzt sechs unabhängige Variabeln, etwa $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ und können setzen:

$$E = \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \quad F = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \beta}, \quad G = \frac{\partial f}{\partial \gamma}, \quad H = \frac{\partial f}{\partial \delta}, \quad J = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}, \quad K = \frac{\partial f}{\partial \zeta}.$$

Durch geeignete Wahl der Variabeln können wir ferner erreichen, dass

$$A + D = -\left(\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \cdots + \zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)$$

wird, und finden dann aus den Gleichungen (2):

$$A = -\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma} - 2\delta \frac{\partial f}{\partial \delta} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon},$$

$$B = \delta \frac{\partial f}{\partial \alpha} + (\varepsilon - \alpha) \frac{\partial f}{\partial \beta} + (\zeta - 2\beta) \frac{\partial f}{\partial \gamma} - \delta \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} - 2\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \zeta},$$

$$C = -2\beta \frac{\partial f}{\partial \alpha} - \gamma \frac{\partial f}{\partial \beta} + (\alpha - 2\varepsilon) \frac{\partial f}{\partial \delta} + (\beta - \zeta) \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \gamma \frac{\partial f}{\partial \zeta},$$

$$D = -\beta \frac{\partial f}{\partial \beta} - 2\gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma} + \delta \frac{\partial f}{\partial \delta} - \zeta \frac{\partial f}{\partial \zeta}.$$

Also ergeben sich die sechs Definitionsgleichungen:

$$(8)\quad \begin{cases} \xi_{xx} - \alpha\xi_x + \delta\xi_y - 2\beta\eta_x - \alpha_x\xi - \alpha_y\eta = 0, \\ \xi_{xy} + (\varepsilon - \alpha)\xi_y - \gamma\eta_x - \beta\eta_y - \beta_x\xi - \beta_y\eta = 0, \\ \xi_{yy} + \gamma\xi_x + (\zeta - 2\beta)\xi_y - 2\gamma\eta_y - \delta_x\xi - \delta_y\eta = 0 \end{cases}$$

u. s. w.

Da in (8) alle Differentialquotienten von einer gewissen Ordnung — hier die von der zweiten — bestimmt sind, braucht man bloss einmal zu differentiiren, um die Integrabilitätsbedingungen aufstellen zu können. Man bekommt die vier:

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha_y - \beta_x = \zeta_x - \varepsilon_y = \gamma\delta - \beta\varepsilon, \\ \beta_y - \gamma_x = \beta(\beta - \zeta) + \gamma(\varepsilon - \alpha), \\ \varepsilon_x - \delta_y = \delta(\beta - \zeta) + \varepsilon(\varepsilon - \alpha). \end{cases}$$

Dieselben bilden ein unbeschränkt integrables System, welches, wie wir wissen die unendliche Gruppe (1) gestattet.

Jedes System von Functionen $\alpha \ldots \zeta$, welches die Gleichungen (9) befriedigt, liefert in (8) eingesetzt die Definitionsgleichungen einer Gruppe, welche mit der allgemeinen linearen Gruppe der Ebene ähnlich ist. Die Definitionsgleichungen der letzteren ergeben sich für $\alpha = \beta = \cdots \zeta = 0$, nämlich:

$$\xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{xx} = \eta_{xy} = \eta_{yy} = 0.$$

Die Gleichungen (8) und (9) zusammengenommen bilden ein unbeschränkt integrables System mit den Unbekannten $\xi, \eta, \alpha \ldots \zeta$. Von diesem Systeme lassen sich die folgenden beiden Integrale angeben:

$$(10)\quad \begin{cases} \xi_x + \eta_y - (\alpha + \varepsilon)\xi - (\beta + \zeta)\eta = \text{const.}, \\ (\xi_x - \alpha\xi - \beta\eta)(\eta_y - \varepsilon\xi - \zeta\eta) - (\xi_y - \beta\xi - \gamma\eta)(\eta_x - \delta\xi - \varepsilon\eta) = \text{const.} \end{cases}$$

Zur Aufstellung derselben führen die Betrachtungen in § 3 Nr. 12.

17. *Zum Schlusse noch einige wenige Bemerkungen über die Integration des Systems* (7).

Wir denken uns $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ als gegebene Functionen von x, y und setzen voraus, dass bei Einsetzung dieser Werthe das System (7) unbeschränkt integrabel wird; es definirt dann also eine gewisse Gruppe, welche mit der allgemeinen projectivischen Gruppe der Ebene ähnlich ist.

Unterwerfen wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ den Gleichungen:

$$(11)\quad \gamma = \mu, \quad \delta = \nu, \quad 2\beta - \zeta = \lambda, \quad 2\varepsilon - \alpha = \varrho,$$

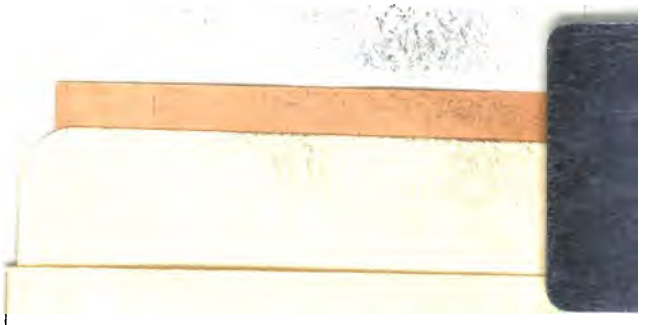
so wird (7) eine Folge der Gleichungen (8). Wenn wir daher $\alpha \ldots \zeta$ in allgemeinster Weise so bestimmen, dass die Gleichungen (11) erfüllt sind und das System (8) unbeschränkt integrabel wird, müssen die Gleichungen (8) ein System Integralgleichungen von (7) darstellen.

Damit das System (8) unbeschränkt integrabel wird, müssen $\alpha \ldots \varepsilon$ die Bedingungen (9) befriedigen; indem wir daher α, γ, δ, ξ aus (9) vermöge der Gleichungen (11) eliminiren, erhalten wir zur Bestimmung von β und ε die Differentialgleichungen:

$$(12) \qquad \begin{cases} 2\varepsilon_y - \beta_x - \varrho_y = 2\beta_x - \varepsilon_y - \lambda_x = \mu\nu - \beta\varepsilon, \\ \beta_y = \mu_x + \beta(\lambda - \beta) + \mu(\varrho - \varepsilon), \\ \varepsilon_x = \nu_y + \nu(\lambda - \beta) + \varepsilon(\varrho - \varepsilon). \end{cases}$$

Auf dieselben Differentialgleichungen kommt Lie in seiner Abhandlung „Classification und Integration u. s. w. III", Archiv for Math. og Naturvid. Bd. VIII, pag. 373ff. (vgl. insbesondere die Gleichungen (3) und (4) daselbst). Aber die Formulirung des ganzen Integrationsproblems ist bei Lie eine wesentlich verschiedene, deshalb hat auch seine Ableitung der Differentialgleichungen (12) mit der von uns gegebenen keine directen Berührungspunkte.

Das System (12) ist äquivalent mit einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung 3. O. (vgl. Lie, a. a. O. pag. 376); ist diese letztere vollständig integrirt, so erhält man $\alpha \ldots \xi$ als Functionen von x, y ausgedrückt und die Substitution dieser Werthe in (8) ergiebt ein System Integralgleichungen von (7). Die vollständige Erledigung des Integrationsproblems bietet jetzt keine Schwierigkeiten mehr und lässt sich ohne Integration durchführen. Wir wollen darauf nicht eingehen, sondern nur noch bemerken, dass sich dabei die Integrale (10) sehr vortheilhaft verwerthen lassen. —



Math 4508.85
Uber die Definitionsgl
Cabot Science
3 2044 091